

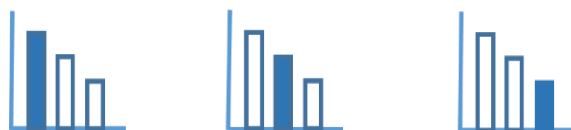
מאור

מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



כמה עולה לנו חוב בבנק?

המשימה קיימת ב – 3 רמות



כל הזכויות שמורות ל
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו
או קטעים ממנה בשום אמצעי

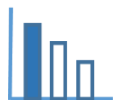
פרטי התקשרות:

maor@labs.edu.haifa.ac.il

04-8288351

תעודת זהות של המשימה

אחוזים, בעיות מילוליות, פונקציות, קריאת מידע מהגרפים	נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה
ט' ו'	כיתה
45 דקות	זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות)
ידע בסיסי בחישובי האחוזים. מעברים בין ייצוגים שונים של מידע. קריאת מידע מהגרפים.  ידע בסיסי בחישובי האחוזים. מעברים בין ייצוגים שונים של מידע. קריאת מידע מהגרפים.  ידע בסיסי בחישובי האחוזים. זיהוי חוקיות וכתיבת ביטוי אלגברי כהכללה. מעברים בין ייצוגים שונים של פונקציה. קצב השתנות של פונקציה, טרנספורמציות לינאריות, קריאת מידע מהגרפים. 	ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה
הבנת מושגים הקשורים לעולם הבנקאות, כגון: ריבית דריבית	אוריינות קונטקסטואלית
הבנת מושגים הקשורים לעולם הבנקאות, כגון: ריבית דריבית	
הבנת מושגים הקשורים לעולם הבנקאות, כגון: ריבית דריבית	
מעברים בין ייצוגים שונים של מידע. הבנת המושגים הקשורים לחינוך פיננסי ועיקר העיסוק הינו במושג ריבית דריבית.	ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם
קריאת הסיטואציה והבנת המטרות המוצבות בפורום כיתתי ודיון קצר סביב הסבר של דפנה לשם הבהרת הגדרת המושג ריבית דריבית. מומלץ לדון בתחום ההגדרה של הבעיה. עבודה בקבוצות של 2-3 תלמידים. <u>סרטון מהאתר האוצר שלי</u>	הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה



משימה: כמה עולה לנו חוב בבנק?

פתרו את הבעיה הבאה

לדוד יש חשבון בבנק "החלומות".

יום אחד דוד גילה שיש לו חוב של 50 שקל בבנק.

דוד מספר לחברתו דפנה על החוב. אולם דפנה מזהירה לגבי הריבית על החוב.

קראו את השיחה בין דוד לדפנה וענו על השאלות.



דפנה

אתה צריך לקחת בחשבון כי ברגע שמדובר בחוב, הבנק לוקח ריבית של 6% לחודש על החוב. ויותר מזה, הריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על הריבית שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)!



דוד

גיליתי שיש לי בבנק חוב של 50 ₪.

מה הכוונה ריבית דריבית?



דפנה

זה אומר שאם תתעלם מהחוב לאחר חודש החוב יהיה:

$$50 + \frac{6}{100} \cdot 50 = 50 \cdot 1.06 = 53 \text{ ₪}$$

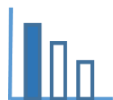
ולאחר חודשיים הריבית מחושבת לא על 50 ₪ אלא על 53 ₪ ואת החוב ניתן לחשב באופן הבא:

$$53 + \frac{6}{100} \cdot 53 = 53 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 53 \cdot 1.06 = 56.18 \text{ ₪}$$

כלומר, בחודשיים החוב שלך יגדל ביותר מ-6 ₪! וכך הלאה...



דוד



בעיה 1

כדי להבין כיצד גדל החוב לאורך הזמן דוד מנסה לארגן את החישובים בטבלה.

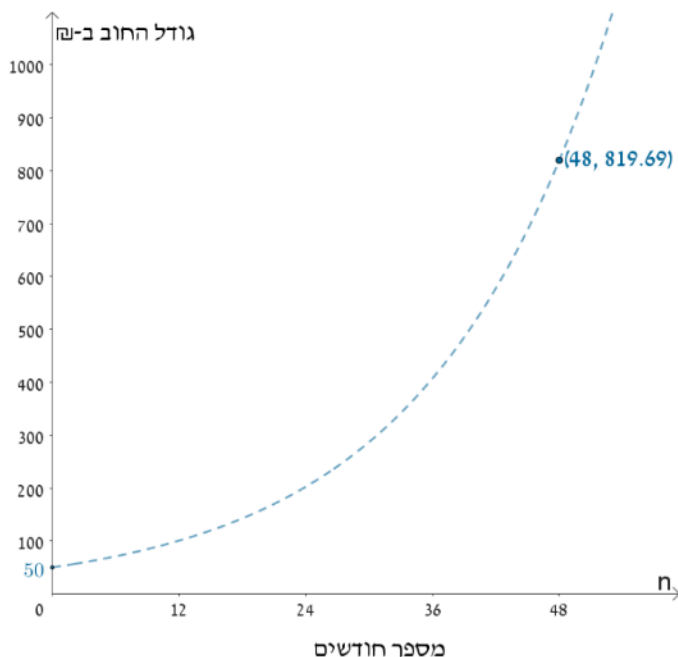
א. עזרו לדוד להשלים את הטבלה:

חשבו מה יהיה גודל החוב לאחר 4 חודשים.

כתבו ביטוי אלגברי המתאר את גודל החוב לאחר n חודשים.

חודש	החוב בתחילת החודש	החוב עם ריבית	
		חישוב	החוב בסוף החודש
1	50 ₪	$50 + \frac{6}{100} \cdot 50 = 50 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06$	53 ₪
2	53 ₪	$50 \cdot 1.06 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06^2$	56.18 ₪
3	56.18 ₪	$50 \cdot 1.06^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06^3$	
4			
n			

ב. לפניכם גרף המתאר את השינוי בחוב של דוד בהתאם למספר החודשים.



התבוננו בטבלה ובגרף וענו על השאלות:

1. האם אחרי 5 חודשים החוב יגדל ב-30%? נמקו.

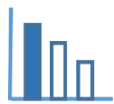
2. לאחר כמה זמן החוב של 50 שקל יכפיל את עצמו?

נמקו באמצעות הגרף ובדקו את עצמכם

על ידי הצבה בביטוי אלגברי שרשמתם בסעיף א.

3. האם ייתכן שגודל החוב יהיה מעל 1,000 ₪?

אם כן, כעבור כמה זמן זה יקרה.



בעיה 2

לרוני יש חוב של 1,000 ש. הבנק לוקח ריבית של 6% לחודש על החוב.

א. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את גודל החוב של רוני לאחר n חודשים.

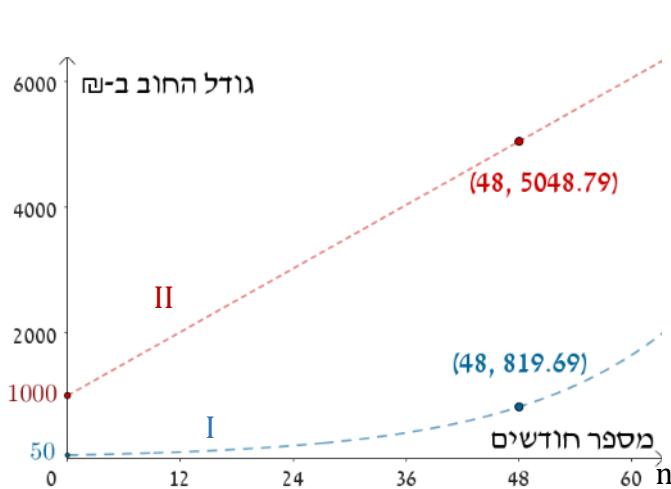
ב. אחרי 10 חודשים **פי כמה** גדול החוב של רוני מהחוב של דוד? נמקו.

ג. לפניכם שלושה תרשימים. בכל תרשים מסורטטים שני גרפים.

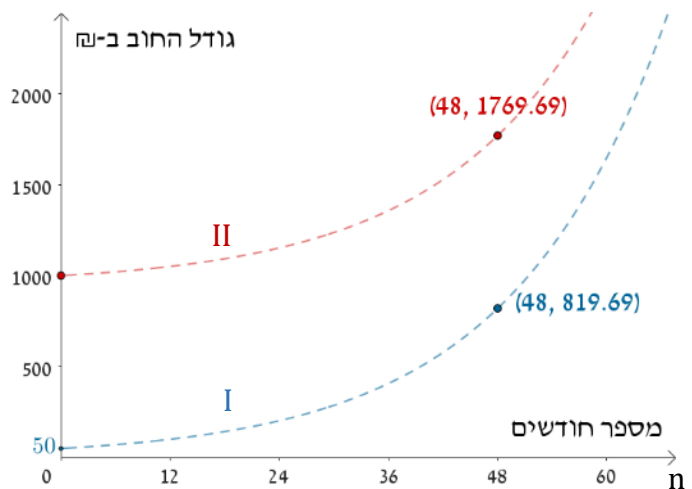
בכל אחד מהתרשימים גרף I מתאר את שינוי החוב של דוד.

באיזה מהתרשימים גרף II מתאר את השינוי בחוב של רוני? נמקו.

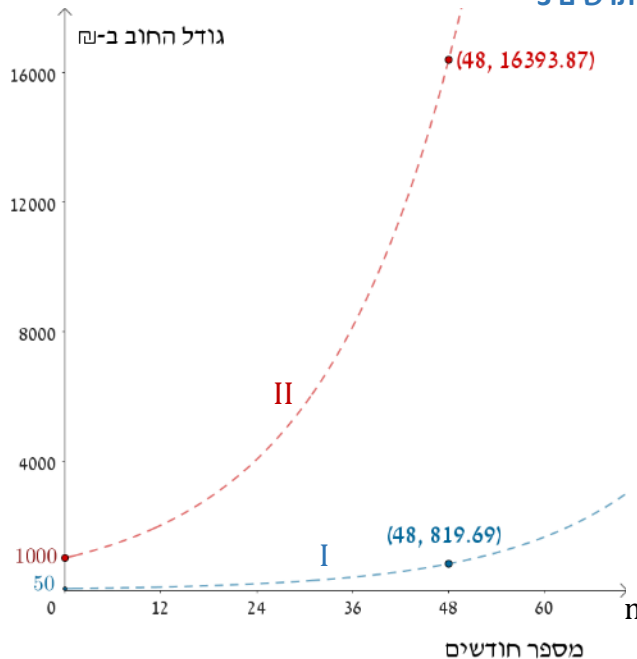
תרשים 2

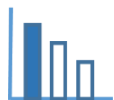


תרשים 1



תרשים 3





פתרונות אפשריים

בעיה 1

א.

החוב עם ריבית		החוב בתחילת החודש	חודש
החוב בסוף החודש	חישוב		
₪ 53	$50 + \frac{6}{100} \cdot 50 = 50 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06$	₪ 50	1
₪ 56.18	$50 \cdot 1.06 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06^2$	₪ 53	2
₪ 59.5508	$50 \cdot 1.06^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06^3$	₪ 56.18	3
₪ 63.123848	$50 \cdot 1.06^3 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 50 \cdot 1.06^4$	₪ 59.5508	4
$₪ 50 \cdot 1.06^n$			n

ב. בסעיף זה תלמידים יחליטו באיזה ייצוג להשתמש – אלגברי או גרפי.

ב1. סעיף זה עוסק בטעות אופיינית: בהרבה מקרים אנשים עלולים לחשוב שהריבית נוספת ליניארית.

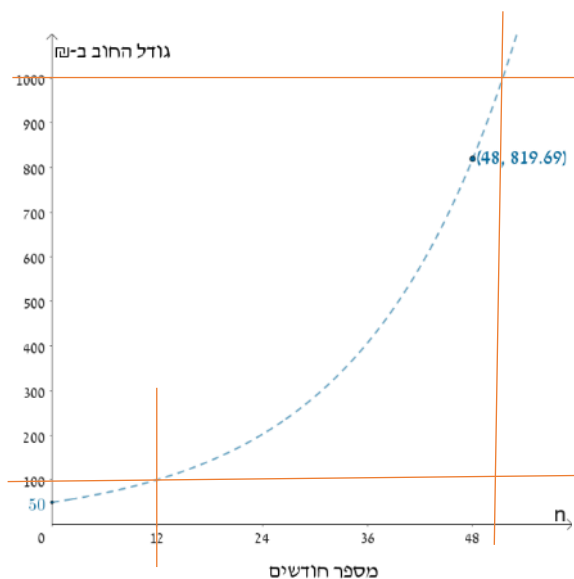
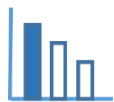
כלומר לחשוב שבכל חודש החוב גדל ב-6% ולכן ב-5 חודשים הוא יגדל ב-30% (6% כפול 5 חודשים).

זוהי הבנה שגויה כיוון שהריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על הריבית שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)! זה מה שדפנה מנסה להסביר לדוד ועל זה כדאי לעשות דיון כיתתי כדי למנוע את הטעות.

החוב ההתחלתי הוא 50 ₪ ולאחר חמישה חודשים החוב יהיה 66.91 ₪ בערך. נוכל לחשב בכמה

אחוזים גדל החוב באופן הבא: $33.82\% \approx 100\% \cdot \left(\frac{66.91-50}{50}\right)$. כלומר לאחר 5 חודשים החוב יגדל

ב-33.82% בערך (ולא ב-30%).



2. לפי הגרף תלמידים יכולים להעריך כי כעבור שנה בערך

החוב של 50 שקל יכפיל את עצמו. הם יוכלו לבדוק את

עצמם באמצעות הצבה בביטוי האלגברי:

$$50 \cdot 1.06^{12} \approx 100.61 \text{ ש"ח}$$

3. על הגרף מסומנת נקודה שמייצגת חוב של

דוד לאחר 48 חודשים. תלמידים יכולים להעריך

שהחוב יהיה מעל 1,000 ש"ח קצת אחרי 4 שנים

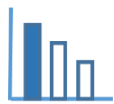
(השערה – זה יקרה במחצית הראשונה של

השנה החמישית). כדי לדייק, הם יכולים להיעזר

בהצבות מתאימות בביטוי האלגברי:

$$50 \cdot 1.06^{51} \approx 976.27 \text{ ש"ח}$$

$$50 \cdot 1.06^{52} \approx 1034.84 \text{ ש"ח}$$



בעיה 2

לרוני יש חוב של 1,000 ₪. הבנק לוקח ריבית של 6% לחודש על החוב.

א. ניתן לתאר את גודל החוב של רוני לאחר n חודשים באופן הבא: $1,000 \cdot 1.06^n$ ₪.

ב. אחרי 10 חודשים החוב של דוד יהיה $50 \cdot 1.06^{10}$ ₪ והחוב של רוני יהיה $1,000 \cdot 1.06^{10}$ ₪.

כלומר, ללא חישוב תלמידים יכולים להסיק כי החוב של רוני יהיה פי 20 גדול מהחוב של דוד.

$$\frac{1,000 \cdot 1.06^n}{50 \cdot 1.06^n} = 20$$

אפשר בשלב זה גם להגיע להכללה על היחס הקבוע:

לכל ערכו של n החוב של רוני יהיה פי 20 גדול מהחוב של דוד.

ג. ממצא מהסעיף ב יסייע להבין את הקשר בין שתי הפונקציות:

I - הפונקציה שמתארת את השינוי בחוב של דוד בהתאם למספר החודשים: $f(x) = 50 \cdot 1.06^n$

II - הפונקציה שמתארת את השינוי בחוב של רוני בהתאם למספר החודשים: $g(x) = 1,000 \cdot 1.06^n$

הפונקציה $g(x)$ מהווה מתיחה אנכית של הפונקציה $f(x)$, כלומר מתקיים כי: $g(x) = 20 \cdot f(x)$.

ולכן **תרשים 3** מתאר את הקשר בין שתי הפונקציות.

$$819.96 \cdot 20 = 16393.8$$

תרשים 1 לא מתאים:

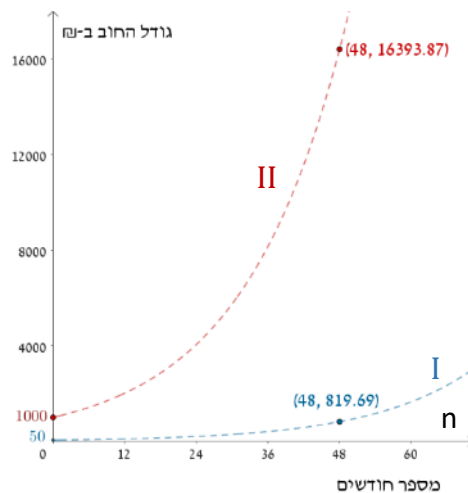
גרף II בתרשים זה מהווה הזזה אנכית של גרף I ב 950.

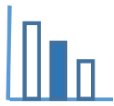
תרשים 2 לא מתאים:

תלמידים יכולים להסביר זאת בהתבסס על דיון סביב השאלה ב1.

קצב שינוי של פונקציה לא אחיד ולכן לא ייתכן

שגרף של פונקציה קווית יתאר את התופעה.





משימה: כמה עולה לנו חוב בבנק?

פתרו את הבעיה הבאה

לדוד יש חשבון בבנק "החלומות".

יום אחד דוד גילה שיש לו חוב של 50 שקל בבנק.

דוד מספר לחברתו דפנה על החוב. אולם דפנה מזהירה לגבי הריבית על החוב.

קראו את השיחה בין דוד לדפנה וענו על השאלות.



דפנה

אתה צריך לקחת בחשבון כי ברגע שמדובר בחוב, הבנק לוקח ריבית של 6% לחודש על החוב. ויותר מזה, הריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על הריבית שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)!



דוד

גיליתי שיש לי בבנק חוב של 50 ₪.

מה הכוונה ריבית דריבית?



דפנה

זה אומר שאם תתעלם מהחוב לאחר חודש החוב יהיה:

$$50 + \frac{6}{100} \cdot 50 = 50 \cdot 1.06 = 53 \text{ ₪}$$

ולאחר חודשיים הריבית מחושבת לא על 50 ₪

אלא על 53 ₪ ואת החוב ניתן לחשב באופן הבא:

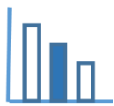
$$53 + \frac{6}{100} \cdot 53 = 53 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 53 \cdot 1.06 = 56.18 \text{ ₪}$$

כלומר, בחודשיים החוב שלך יגדל ביותר מ-6 ₪!

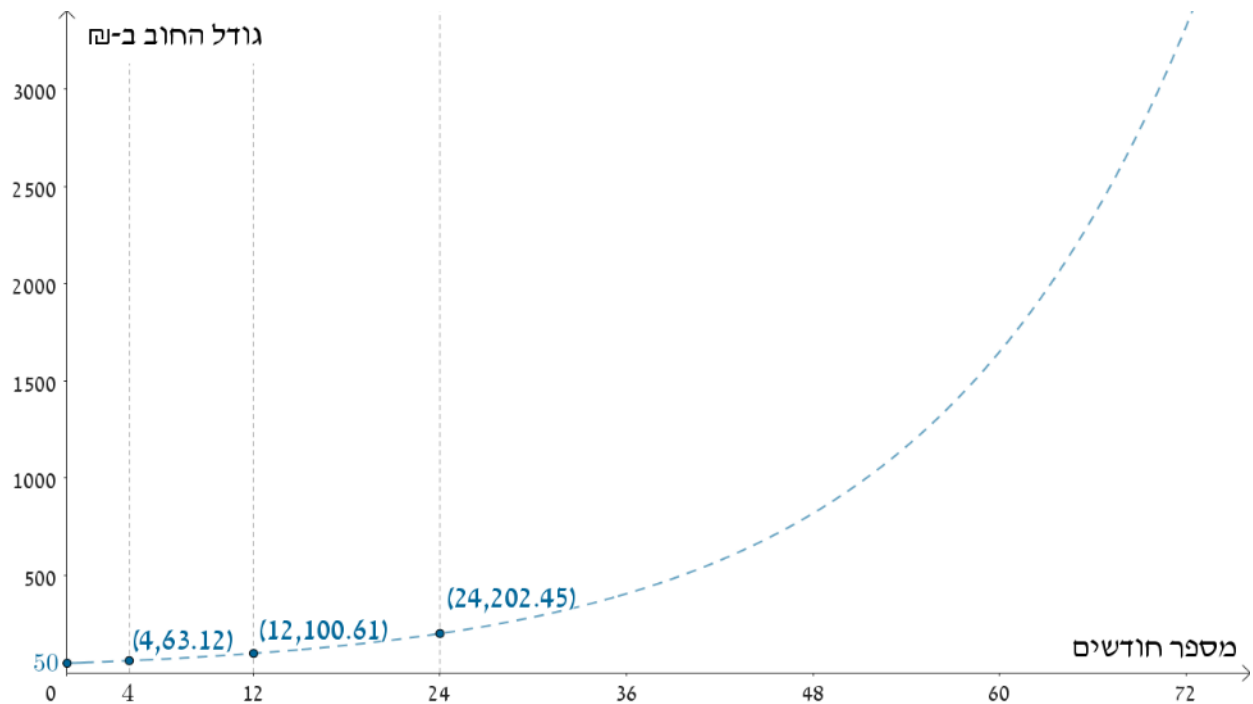
ובך הלאה...



דוד

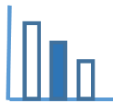


לפניכם גרף המתאר את השינוי בחוב של דוד בהתאם למספר החודשים.



התבוננו בחישוב של דפנה ובגרף וענו על השאלות הבאות:

- חשבו מה יהיה החוב אחרי שלושה חודשים.
- בכמה אחוזים יגדל החוב של 50 שקל אחרי 5 חודשים?
- האם ייתכן שהחוב של 50 שקל יכפיל את עצמו?
אם כן, העריכו כעבור כמה זמן זה יקרה.
אם לא, נמקו מדוע לא ייתכן.
- האם ייתכן שהחוב יהיה מעל 2,000 ₪?
אם כן, העריכו כעבור כמה זמן זה יקרה.
אם לא, נמקו מדוע לא ייתכן.



פתרונות אפשריים

א. תלמידים יכולים להמשיך את החישובים של דפנה המוצגים בתיאור סיטואציה

$$56.18 + \frac{6}{100} \cdot 56.18 = 56.18 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 56.18 \cdot 1.06 = 59.5508$$

כלומר, לאחר 3 חודשים החוב של דוד יהיה כ-60 ₪.

ב. סעיף זה עוסק בטעות אופיינית: בהרבה מקרים אנשים עלולים לחשוב שהריבית נוספת ליניארית.

כלומר לחשוב שבכל חודש החוב גדל ב-6% ולכן ב-5 חודשים הוא יגדל ב-30% (6% כפול 5 חודשים).

זוהי הבנה שגויה כיוון שהריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על הריבית

שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)!

זה מה שדפנה מנסה להסביר לדוד ועל זה כדאי לעשות דיון כיתתי כדי למנוע את הטעות.

כדי לחשב מה יהיה החוב אחרי חמישה חודשים תלמידים יכולים להיעזר בגרף עליו מסומנת נקודה

שמייצגת חוב של דוד לאחר 4 חודשים: $66.91 \approx 62.12 \cdot 1.06$.

כלומר, לאחר חמישה חודשים החוב יהיה 66.91 ₪ בערך, החוב ההתחלתי הוא 50 ₪.

$$\left(\frac{66.91-50}{50}\right) \cdot 100\% \approx 33.82\%$$

כלומר לאחר 5 חודשים החוב של דוד יגדל ב-33.82% בערך.

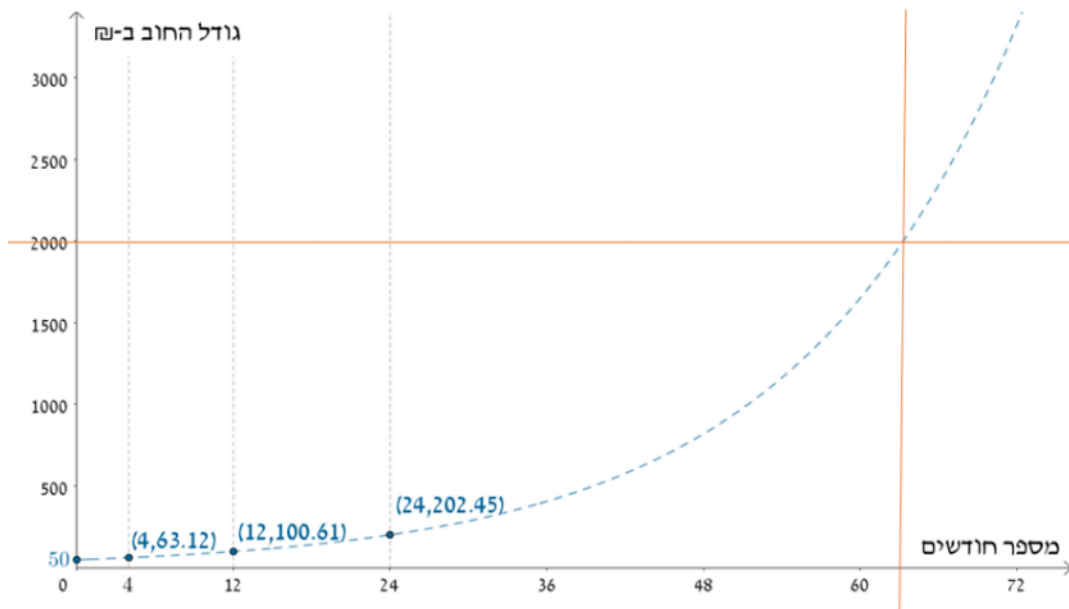
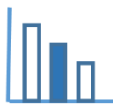
ג. לפי הגרף תלמידים יכולים להעריך כי כעבור שנה בערך החוב של 50 שקל יכפיל את עצמו (אפשר

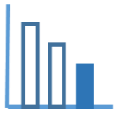
להיעזר בסרגל).

ד. מתוך הגרף תלמידים יסיקו ייתכנות המצב שהחוב יהיה מעל 2,000 ₪.

כדי להעריך כעבור כמה זמן בערך הדבר עלול לקרות תלמידים יכולים להיעזר בסרגל כדי להעביר קו אופקי.

תלמידים אחדים יסיקו כי זה יקרה במחצית הראשונה של השנה השישית.





משימה: כמה עולה לנו חוב בבנק?

פתרו את הבעיה הבאה

לדוד יש חשבון בבנק "החלומות".

יום אחד דוד גילה שיש לו חוב של 50 שקל לבנק.

דוד מספר לחברתו דפנה על החוב. אולם דפנה מזהירה לגבי הריבית על החוב.

קראו את השיחה בין דוד לדפנה וענו על השאלות.



דפנה

אתה צריך לקחת בחשבון כי ברגע שמדובר בחוב, הבנק לוקח ריבית של 6% לחודש על החוב. ויותר מזה, הריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על הריבית שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)!



דוד

גיליתי שיש לי בבנק חוב של 50 ₪.

מה הכוונה ריבית דריבית?



דוד

זה אומר שאם תתעלם מהחוב

לאחר חודש החוב יהיה:

$$50 + \frac{6}{100} \cdot 50 = 50 \cdot 1.06 = 53 \text{ ₪}$$

ולאחר חודשיים הריבית מחושבת לא על 50 ₪

אלא על 53 ₪ ואת החוב ניתן לחשב כך:

$$53 + \frac{6}{100} \cdot 53 = 53 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 53 \cdot 1.06 = 56.18 \text{ ₪}$$

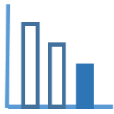
כלומר, בחודשיים החוב שלך יגדל ביותר מ-6 ₪!

ובך הלאה...



דפנה





בעיה 1

בטבלה הבאה מוצג כיצד משתנה החוב של דוד אם הוא לא ישלם אותו.

השלימו את הטבלה:

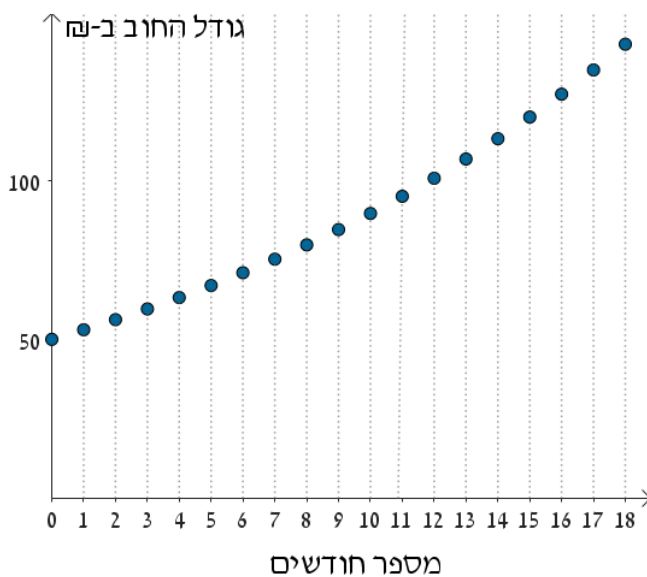
חודש	החוב ללא ריבית (ב-₪)	החוב עם ריבית	
		חישוב	סה"כ החוב (ב-₪)
1	₪ 50	$50 + \frac{6}{100} \cdot 50$	₪ 53
2	₪ 53	$53 + \frac{6}{100} \cdot 53$	₪ 56.18
3	₪ 56.18	$56.18 + \frac{6}{100} \cdot 56.18$	₪ _____
4	₪ _____	_____	₪ _____

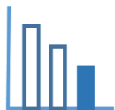
בעיה 2

לפניכם גרף המתאר את השינוי בחוב של דוד בהתאם למספר החודשים.

ענו על השאלות הבאות:

- כיצד ניתן לראות בגרף מה היה החוב ההתחלתי של דוד?
- האם ייתכן שהחוב של 50 ₪ יכפיל את עצמו?
אם כן, העריכו כעבור כמה זמן זה יקרה. נמקו.
- אחרי 5 חודשים החוב היה 66.91 ₪. האם החוב גדל ב-30%? נמקו.



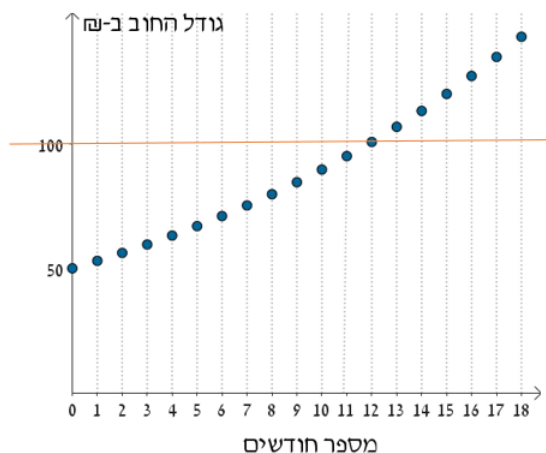


פתרונות אפשריים

בעיה 1

חודש	החוב ללא ריבית (ב-₪)	החוב עם ריבית	
		חישוב	סה"כ החוב (ב-₪)
1	₪ 50	$50 + \frac{6}{100} \cdot 50$	₪ 53
2	₪ 53	$53 + \frac{6}{100} \cdot 53$	₪ 56.18
3	₪ 56.18	$56.18 + \frac{6}{100} \cdot 56.18$	₪ 59.5508
4	₪ 59.5508	$59.5508 + \frac{6}{100} \cdot 59.5508$	₪ 63.123848

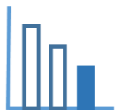
בעיה 2



- א. הנקודה (0, 50) מייצגת את החוב ההתחלתי של דוד.
- ב. לפי הגרף תלמידים יכולים להעריך כי כעבור שנה בערך החוב של 50 שקל יכפיל את עצמו (אפשר להיעזר בסרגל).
- ג. סעיף זה עוסק בטעות אופיינית: בהרבה מקרים אנשים עלולים לחשוב שהריבית נוספת ליניארית. כלומר לחשוב שבכל חודש החוב גדל ב-6% ולכן ב-5 חודשים הוא יגדל ב-30% (6% כפול 5 חודשים). זוהי הבנה שגויה כיוון שהריבית מחושבת כל חודש לא רק על החוב ההתחלתי אלא גם על

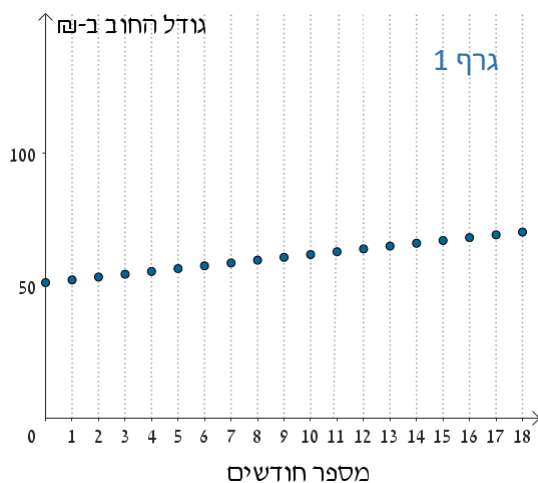
הריבית שהצטברה ונוספה לחוב בחודש שעבר (ריבית דריבית)! זה מה שדפנה מנסה להסביר לדוד ועל זה כדאי לעשות דיון כיתתי כדי למנוע את הטעות.

החוב ההתחלתי הוא 50 ₪ ולאחר חמישה חודשים החוב יהיה 66.91 ₪ בערך. תלמידים יכולים לחשב בכמה אחוזים גדל החוב באופן הבא: $100\% \approx 33.82\% \cdot \left(\frac{66.91-50}{50}\right)$. כלומר לאחר 5 חודשים החוב יגדל ב-33.82% בערך (ולא ב-30%).



לשיקול דעת של המורה, אפשר להציג גרפים נוספים שלא תואמים לבעיה ולדון עם התלמידים מדוע גרפים אלה אינם מתאימים. בדיון זה עשויים לעלות מושגים חשובים מוכרים, כמו קצב שינוי, עליה וירידה של פונקציה וכדומה.

למשל, גרף 1 משמאל לא מתאים – תלמידים ראו בסעיף ג שקצב שינוי לא אחיד.



למשל, גרף 2 לא מתאים – הרי תלמידים יודעים שמדובר בפונקציה עולה ולכן לא ייתכן שבאותם התנאים יהיו מעברים מעליה לירידה ולהפך של הפונקציה.

