

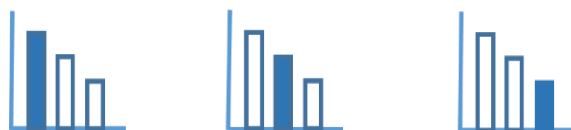
מאור

מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



תכנון חלון בצורת מחומש

המשימה קיימת ב – 3 רמות



כל הזכויות שמורות ל
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו
או קטעים ממנה בשום אמצעי

פרטי התקשרות:

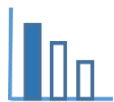
maor@labs.edu.haifa.ac.il

04-8288351



תעודת זהות של המשימה

שטחים והיקפים של צורות במישור	נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה
ט'	כיתה
עד 45 דקות	זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות)
שטח והיקף מחומש, מלבן ומשולש, זיהוי ביטוי אלגברי שמתאר תופעה, קריאת גרף שמתאר תופעה, תחום ההגדרה של הבעיה	ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה
שטח והיקף מחומש, מלבן ומשולש, זיהוי ביטוי אלגברי שמתאר תופעה, כתיבת ביטוי אלגברי שמתאר את התופעה, התאמה של גרף המתאים לביטוי אלגברי, תחום ההגדרה של הבעיה	
שטח והיקף מחומש, מלבן ומשולש, כתיבת ביטוי אלגברי שמתאר את התופעה, סרטוט גרף המתאים לביטוי אלגברי, תחום ההגדרה של הבעיה, משפט פיתגורס.	
תכנון חלון לפי שיקולים הנדסיים. קישוריות בין מושגים מחיי יומיום לבין מושגים מתמטיים.	אוריינות קונטקסטואלית
תכנון חלון לפי שיקולים הנדסיים. קישוריות בין מושגים מחיי יומיום לבין מושגים מתמטיים.	
תכנון חלון לפי שיקולים הנדסיים. קישוריות בין מושגים מחיי יומיום לבין מושגים מתמטיים.	
פתרון בעיות מילוליות המשלבות גיאומטריה ואלגברה. מעברים בין ייצוגים שונים של פונקציה.	ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם
עבודה בקבוצות	הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה



משימה - תכנון חלון בצורת מחומש

פתרו את הבעיה הבאה

טל בונה בית דו קומתי. היא מצאה תמונה של חלון בצורת מחומש באינטרנט, התלהבה מאוד והחליטה לבנות חלון דומה בקומה השנייה בבית שלה.



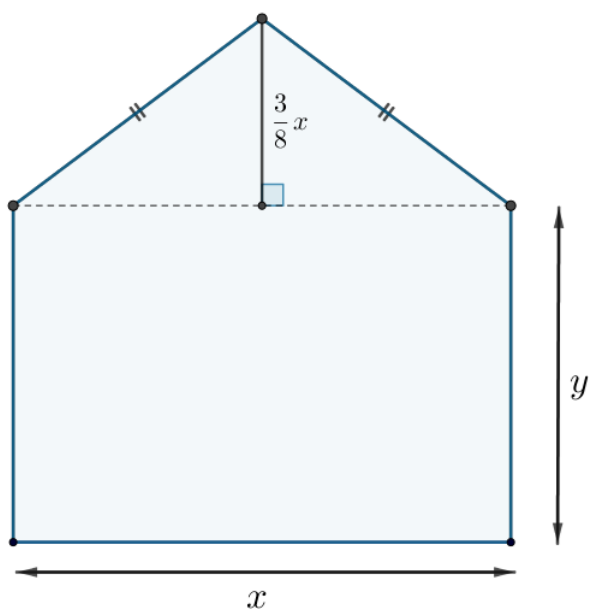
טל פנתה לצחי הקבלן האחראי על הבנייה וביקשה לבנות לה חלון דומה.

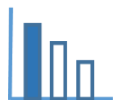
צחי הגדיר את התנאים הבאים:

- אורך המסגרת החיצונית של החלון צריך להיות 18 מ'.
- החלון בצורת מחומש שראתה טל יהיה מורכב ממלבן ומשולש שווה שוקיים.
- גובה המשולש יהווה $\frac{3}{8}$ מרוחב החלון (המלבן).

נסמן ב- x את רוחב החלון (במטרים).

נסמן ב- y את אורך החלק המלבני של החלון (במטרים).



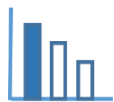


היעזרו בתרשים החלון וענו על השאלות הבאות:

- א. בטאו את אורך החלק המלבני של החלון באמצעות x .
- ב. 1. כתבו פונקציה $S(x)$ שמייצגת את שטח החלון כתלות ברוחב החלון ומתאימה לדרישות הקבלן.
2. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $S(x)$



- ג. טל ביקשה גם שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור.
מה הם ממדי החלון המתאימים? נמקו.
- ד. מסתבר שמידות הפתח בקיר לבניית החלון הן: רוחב הפתח הוא 7 מטר וגובהו 4 מטר.
האם החלון שאת ממדיו חישבתם בסעיף ג ייכנס לפתח זה? נמקו.



פתרונות אפשריים

סעיף א

החלון מורכב ממלבן ומשולש ונתון כי אורך המסגרת החיצונית 18 מ'.

ניתן לבטא את אורך צלע המשולש באמצעות x

בעזרת משפט פיתגורס:

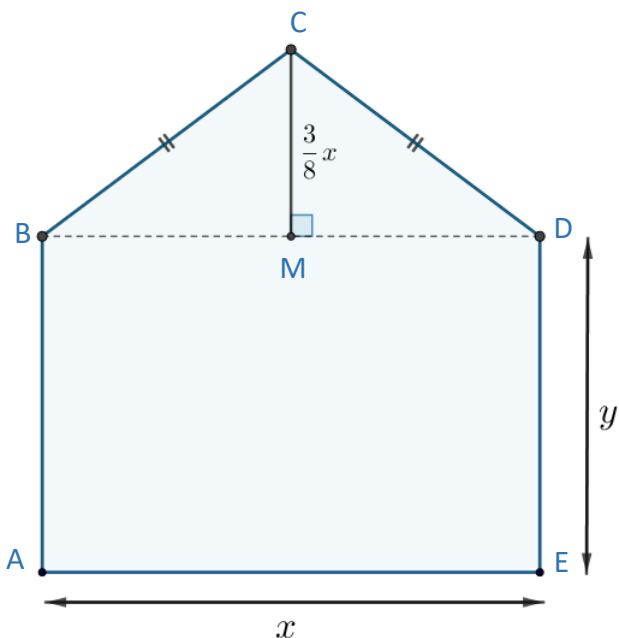
$$BC = \sqrt{\left(\frac{3}{8}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{64}x^2} = \frac{5}{8}x$$

$x \geq 0$

אורך המסגרת החיצונית של החלון ניתן לבטא באופן הבא:

$$x + 2y + 2 \cdot \frac{5}{8}x = 18 \rightarrow y = 9 - \frac{9}{8}x$$

$$0 \leq x \leq 8 \leftarrow y \geq 0 \leftarrow 9 - \frac{9}{8}x \geq 0 \leftarrow \text{תחום ההגדרה של הבעיה}$$

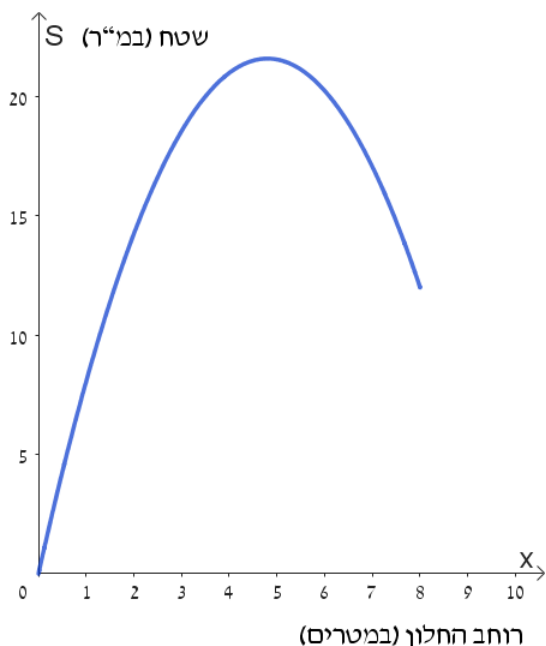


סעיף ב

$$1. S(x) = xy + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x^2 = x \cdot \left(9 - \frac{9}{8}x\right) + \frac{3}{16}x^2 = 9x - \frac{15}{16}x^2$$

$$2. \text{בהתחשב בתחום ההגדרה של הבעיה } 0 \leq x \leq 8,$$

ניתן לסרטט את גרף הפונקציה $S(x)$:



סעיף ג

טל ביקשה שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור.

כדי למצוא את ממדי החלון המתאימים יש למצוא את שיעורי

הקודקוד של הפרבולה:

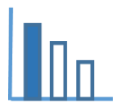
$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2 \cdot \left(-\frac{15}{16}\right)} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ מטרים}$$

באמצעות תכונת הסימטריה של פרבולה:

נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x הן $(0,0)$ ו- $(9.6,0)$.

$$x_{\text{קודקוד}} = \frac{0+9.6}{2} = 4.8 \text{ מטרים}$$

שטח החלון במקרה זה יהיה 21.6 מ"ר.



סעיף ד

האילוף הבא [מסתבר שמידות הפתח בקיר לבניית החלון הן: רוחב הפתח הוא 7 מטר וגובהו 4 מטר].
מוביל למסקנה שחלון שממדיו חושבו בסעיף ג לא ייכנס לפתח זה.

נימוק אפשרי:

גובה החלון H ניתן לבטא באופן הבא

$$H = y + \frac{3}{8}x = 9 - \frac{3}{4}x$$

כאשר 4.8 מטר $x =$ מתקבל כי 5.4 מטר H , אבל $5.4 > 4$

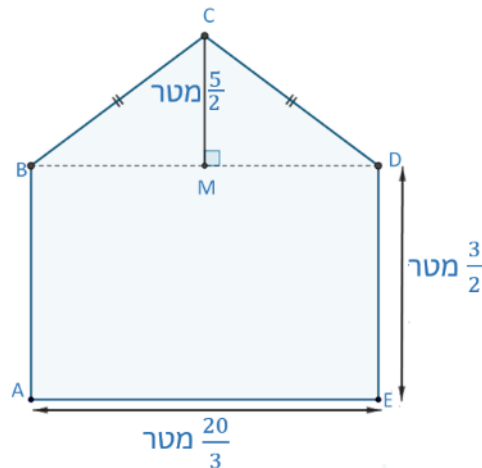
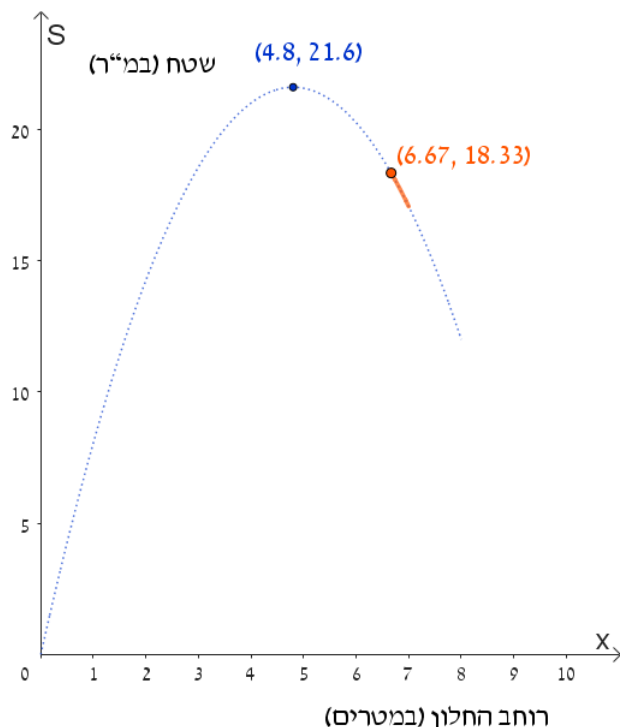
לכן החלון שממדיו חושבו בסעיף ג לא ייכנס לפתח בקיר של טל.

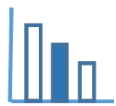
לשיקול דעת של המורה אם לדון עם התלמידים לגבי התאמה אפשרית של חלון לאילוף לגבי מידות הפתח

בקיר. למעשה על התלמידים לפתור משוואה: $9 - \frac{3}{4}x = 4$ כדי למצוא את רוחב החלון המתאים לגובה של 4 מטר (האילוף לגבי רוחב הפתח אינו סותר את תחום ההגדרה של הבעיה).

תלמידים ימצאו כי כאשר $\frac{20}{3}$ מטר $x =$ גובה החלון יהיה 4 מטר.

בהתחשב בתחום הירידה של הפרבולה ניתן להסיק כי כאשר רוחב החלון יהיה $\frac{20}{3}$ מטר השטח יהיה הכי גדול ולכן דרך החלון של טל תעבור כמות מרבית של אור. אפשר להתאים את הגרף למצב זה (מסומן בכתום):





משימה - תכנון חלון בצורת מחומש

פתרו את הבעיה הבאה

טל בונה בית דו קומתי. היא מצאה תמונה של חלון בצורת מחומש באינטרנט, התלהבה מאוד והחליטה לבנות חלון דומה בקומה השנייה בבית שלה.



טל פנתה לצחי הקבלן האחראי על הבנייה וביקשה לבנות לה חלון דומה.

צחי הגדיר את התנאים הבאים:

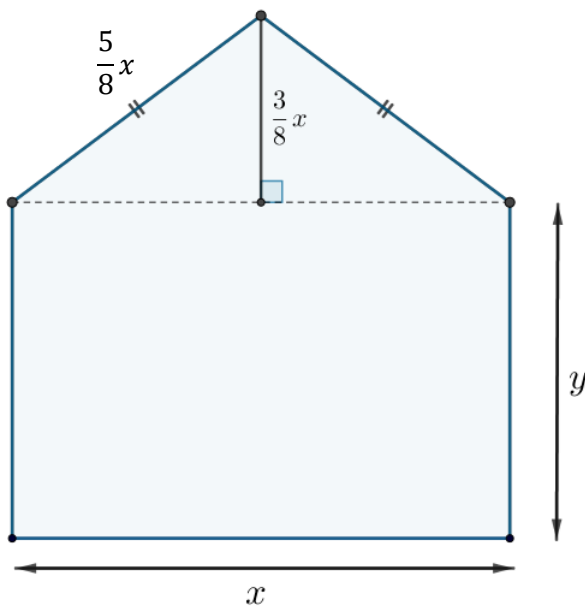
- אורך המסגרת החיצונית של החלון צריך להיות 18 מ'.
- החלון בצורת מחומש שראתה טל יהיה מורכב ממלבן ומשולש שווה שוקיים.

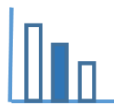
גובה המשולש יהווה $\frac{3}{8}$ מרוחב החלון (המלבן).

צלע המשולש תהווה $\frac{5}{8}$ מרוחב החלון (המלבן).

נסמן ב- x את רוחב החלון (במטרים).

נסמן ב- y את אורך החלק המלבני של החלון (במטרים).





היעזרו בתרשים החלון וענו על השאלות הבאות:

א. איזה מהביטויים מייצג את אורך המסגרת החיצונית של החלון?

$$2(x + y + \frac{5}{8}x) \quad (4) \quad x + 2y + \frac{10}{8}x \quad (3) \quad x + 2y + \frac{3}{8}x \quad (2) \quad 2x + 2y + \frac{3}{8}x \quad (1)$$

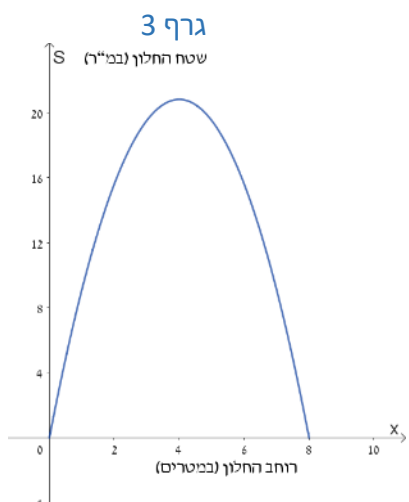
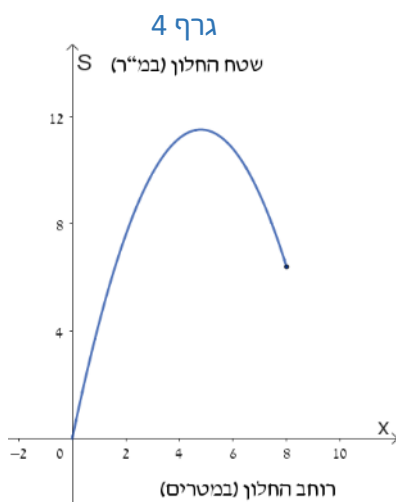
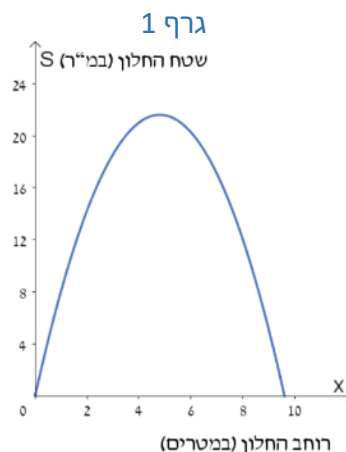
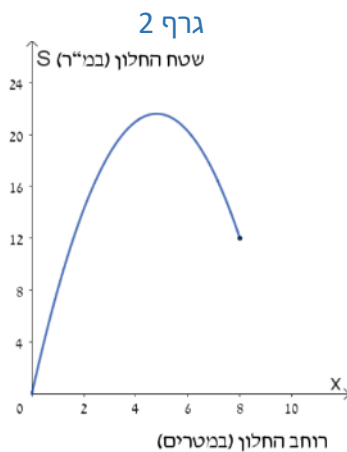
ב. בטאו את אורך החלק המלבני של החלון באמצעות x .

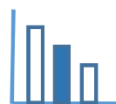
ג. לפניכם 4 מדידות: (1) 4 מ' (2) 6 מ' (3) 8 מ' (4) 16 מ'

אילו מהמדידות יכולות להתאים לרוחב החלון? נמקו את קביעתכם.

ד. כתבו פונקציה $S(x)$ שמייצגת את שטח החלון כתלות ברוחב החלון ומתאימה לדרישות הקבלן.

ה. לפניכם 4 גרפים. איזה גרף מתאים לפונקציה $S(x)$? נמקו את השיקולים שלכם.



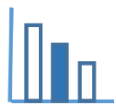


ו. טל ביקשה גם שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור.

1. מה הם ממדי החלון המתאימים? נמקו.

2. מה השטח של החלון הזה? נמקו.

3. סמנו על הגרף שבחרתם בסעיף ה את ממדי החלון המתאים.



פתרונות אפשריים

סעיף א

הביטוי (3) $x + 2y + \frac{10}{8}x$ מייצג את אורך המסגרת החיצונית של החלון.

סעיף ב

אורך המסגרת החיצונית של החלון ניתן לבטא באופן הבא:

$$x + 2y + 2 \cdot \frac{5}{8}x = 18 \rightarrow y = 9 - \frac{9}{8}x$$

$$0 \leq x \leq 8 \leftarrow y \geq 0 \leftarrow 9 - \frac{9}{8}x \geq 0$$

סעיף ג

בהסתמך על תחום ההגדרה של הבעיה $0 < x < 8$, המדידות שיכולות להתאים לרוחב החלון הן:

(1) 4 מטרים או (2) 6 מטרים

סעיף ד

$$S(x) = xy + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x^2 = x \cdot \left(9 - \frac{9}{8}x\right) + \frac{3}{16}x^2 = 9x - \frac{15}{16}x^2$$

סעיפים ה - ו

בהתחשב בתחום ההגדרה של הבעיה $0 \leq x \leq 8$,

ההתלבטות היא בין גרף 2 לבין גרף 4 וגרף 3.

גרף 3 אינו מתאים כיוון שהנקודה $(8,0)$ אינה על גרף

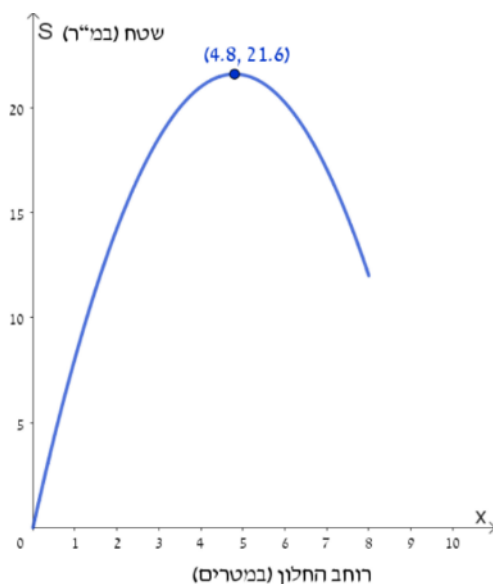
הפונקציה.

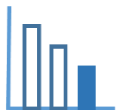
באמצעות החישובים הבאים ניתן להסיק

ש: גרף (2) הוא הגרף המתאים לפונקציה $S(x)$:

באמצעות הנוסחה: מטרים $x_{קדקוד} = 4.8$

שטח החלון במקרה זה יהיה 21.6 מ"ר.





משימה - תכנון חלון בצורת מחומש

פתרו את הבעיה הבאה

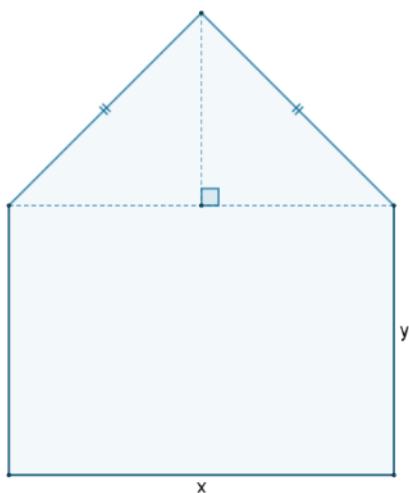
טל בונה בית דו קומתי. היא מצאה תמונה של חלון בצורת מחומש באינטרנט, התלהבה מאוד והחליטה לבנות חלון דומה בקומה השנייה בבית שלה.



טל פנתה לצחי הקבלן האחראי על הבנייה וביקשה לבנות לה חלון דומה.

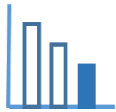
צחי הגדיר את התנאים הבאים:

- החלון בצורת מחומש שראתה טל יהיה מורכב ממלבן ומשולש שווה שוקיים.
- גובה המשולש יהווה רבע מרוחב החלון (המלבן).
- אורך המסגרת החיצונית של החלק המלבני של החלון צריך להיות 12 מ'.



נסמן ב- x את רוחב החלון (במטרים).

נסמן ב- y את אורך החלק המלבני של החלון (במטרים).



היעזרו בתרשים החלון וענו על השאלות הבאות:

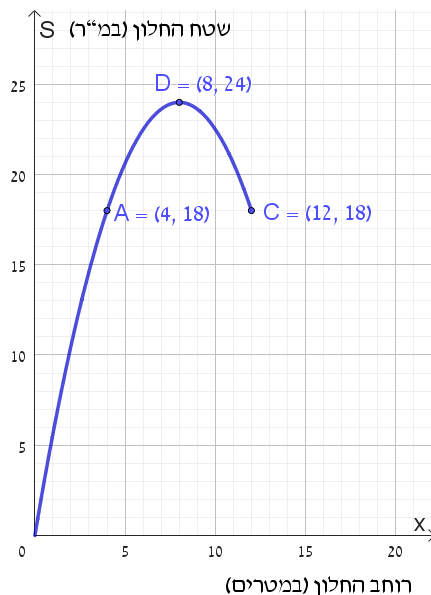
א. איזה מהביטויים מייצג את אורך המסגרת החיצונית של החלק המלבני של החלון?

$$2x + 2y \quad (1) \quad x + 2y \quad (2) \quad x + y \quad (3) \quad 2x + y \quad (4)$$

ב. בטאו את אורך החלק המלבני של החלון באמצעות x .

ג. השלימו את הטבלה ופרטו את חישוביכם:

x רוחב החלון (מטרים)	y אורך הצלע האנכית של החלון (מטרים)	אורך המסגרת החיצונית בחלק המלבני (מטרים)	שטח החלק המלבני (מ"ר)	שטח המשולש (מ"ר)	S שטח החלון (מ"ר)
4					
6					
12					



ד. לפניכם גרף הפונקציה $S(x)$ שמייצגת את שטח החלון כתלות

ברוחב החלון ומתאימה לדרישות הקבלן.

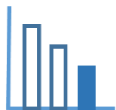
היעזרו בגרף וענו על השאלות הבאות:

(1) מהי המשמעות של הנקודה C במציאות?

(2) טל ביקשה שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור.

מה הם ממדי החלון המתאימים לכל הדרישות של צחי וטל?

מה שטח השמשה של חלון זה? נמקו.



פתרונות אפשריים

סעיף א

הביטוי $x + 2y$ (2) מייצג את אורך המסגרת החיצונית של החלק המלבני של החלון.

סעיף ב

אורך החלק המלבני של החלון ניתן לבטא באמצעות x באופן הבא:

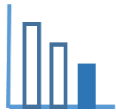
$$x + 2y = 12 \rightarrow y = 6 - \frac{x}{2}$$

$$0 \leq x \leq 12 \leftarrow y \geq 0 \leftarrow 6 - \frac{x}{2} \geq 0$$

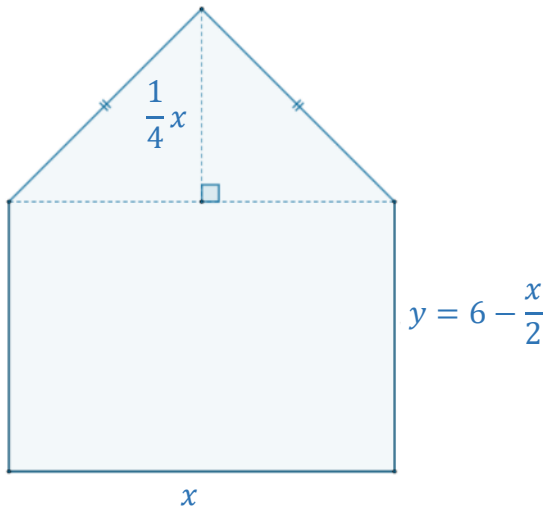
סעיף ג

S שטח החלון (מ"ר)	שטח המשולש (מ"ר)	שטח החלק המלבני (מ"ר)	אורך המסגרת החיצונית בחלק המלבני (מטרים)	y אורך הצלע האנכית של החלון (מטרים)	x רוחב החלון (מטרים)
18	2	16	12	4	4
22.5	4.5	18	12	3	6
18	18	0	12	0	12*

*מקרה מנוון



סעיף ד



1ד) הנקודה C היא קצה התחום – זהו המקרה המנוון כאשר החלון הינו בצורת משולש (ולא מחומש). זאת כיוון שכאשר $x = 12$ אורך החלק המלבני של החלון $y = 0$.

2ד) טל ביקשה שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור.

הדבר מתאפשר כאשר שטח החלון יהיה מקסימאלי. בסרטוט המצורף מסומנת נקודת המקסימום של הפרבולה D. על פי הגרף ניתן להסיק כי כאשר רוחב החלון הינו 8 מטרים שטח החלון המקסימאלי הוא 24 מ"ר. לכן במקרה זה דרך החלון תעבור כמות מרבית של אור. ממדי החלון הם:

רוחב החלון: 8 מטרים $x = 8$

אורך הצלע האנכית של החלון: 2 מטרים $y = 2$
גובה המשולש: 2 מטרים
שטח החלון המקסימאלי הוא 24 מ"ר.

← גובה החלון הינו 4 מטרים