

מאור

מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



כמה רחוק קו האופק - קירובים

המשימה קיימת ב – 2 רמות



כל הזכויות שמורות ל
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו
או קטעים ממנה בשום אמצעי

פרטי התקשרות:

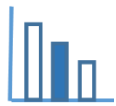
maor@labs.edu.haifa.ac.il

04-8288351



תעודת זהות של המשימה

נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה	משפט פיתגורס
כיתה	ט', י'
זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות)	45 דקות
ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה	 שימוש במשפט פיתגורס, הסקת נתונים חסרים בעזרת משפט פיתגורס, שורש ריבועי – הגדרה ומשפטים. אוריינות כמותית: חישוב, אומדן ועיגול מספרים לצורך פתרון בעיות.
	 שימוש במשפט פיתגורס, הסקת נתונים חסרים בעזרת משפט פיתגורס, שורש ריבועי – הגדרה ומשפטים. אוריינות כמותית: חישוב, אומדן ועיגול מספרים לצורך פתרון בעיות.
אוריינות קונטקסטואלית	 ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.
	 ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.
ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם	מידע המוצג בטקסט ובתרשים מאפשר להשתמש במודל של משולש ישר זווית, כדי לחשב כמה רחוק יכול לראות הצופה, שנמצא בגובה מסוים מהקרקע. זאת על סמך המשפט הידוע שנלמד בכיתה ח – משפט פיתגורס.
הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה	בפתרון הבעיה נתעלם מהאליפטיות של כדור הארץ ונניח שהוא כדור עגול לחלוטין ברדיוס של 6,371 קילומטר. הערה: קיימת משימה נוספת: "כמה רחוק קו האופק-גרפים".



משימה: כמה רחוק קו האופק - קירובים

תיאור סיטואציה

הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה בין השמים לארץ או לים. קיומו של קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ, שבעטייה אין הצופה יכול לצפות בפני כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

2. את רדיוס כדור הארץ ב- R (נניח כי $6,371$ ק"מ $R =$).

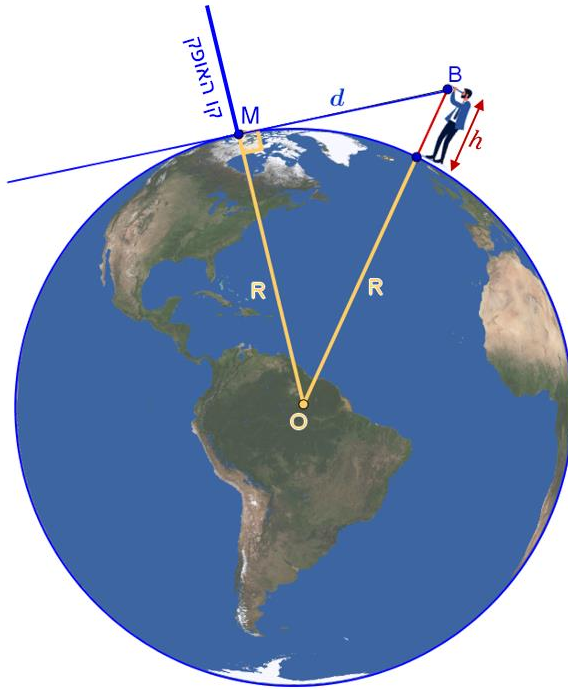
ונקודה על קו האופק M – זוהי נקודה שמבט הראיה שלנו מופנה אליה.

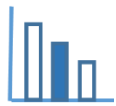
3. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על הסרטוט:

h - גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

d (BM) - המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

4. נתון כי המשולש $\triangle OMB$ שנוצר הוא משולש ישר זווית ($\angle M = 90^\circ$) במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.





פתרו את הבעיה הבאה

לפניכם סקיצה המתארת את הסיטואציה של מרחק צופה מקו האופק.

המעגל שמרכזו בנקודה O מייצג את כדור הארץ.

הנקודות O, B ו-C נמצאות על קו ישר אחד.

שימו לב: סקיצה משמעת סרטוט לא מדויק,

כך למשל, במציאות, רדיוס כדור הארץ (R)

גדול בהרבה יותר מגובה העיניים של הצופה (h).

א. דנה נמצאת על שפת הים ומסתכלת על הסירה

שמתרחקת מהחוף אל קו האופק.

נניח שגובה העיניים של דנה הינו כ- 1.5 מ',

1. כמה רחוק דנה יכולה לראות?

2. החל מאיזה מרחק (בערך) של סירה מהחוף דנה כבר לא תוכל לראות אותה?

ב. בכל סעיף נתון ערכו של h .

1. חשבו בקירוב את ערכי הביטויים הרשומים:

d	$R + h$	h
		3 מטר
		20 מטר
		50 מטר

משלכם

משלכם

2. כתבו ביטוי אלגברי שמאפשר לחשב (בקירוב) את מרחקו של צופה אל קו האופק.

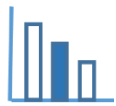
3. האם הביטוי $\sqrt{2Rh}$ הוא קירוב טוב לחישוב המרחק מקו האופק? נמקו תשובתכם.

הידעתם? נוסחאות לחישוב מרחק קו האופק שימושיות למשל בקביעת גובהו של מגדל תצפית,

או בקביעת המידה שבה על פריסקופ של צוללת לבלוט במים כדי לצפות בכלי שיט עוינים.

מקורות:

ויקיפדיה - אופק



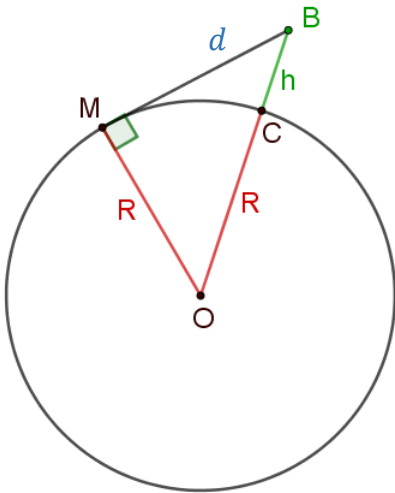
פתרונות אפשריים

א. $d = \sqrt{(6371 + 0.0015)^2 - 6371^2} \sim 4.37$ ק"מ (משפט פיתגורס)

דנה יכולה לראות את הסירה במרחק של בערך 4.4 ק"מ.

במרחק גדול יותר דנה לא תוכל לראות את הסירה.

ב.1



d	R + h	h
6.18 ק"מ	6371.003 ק"מ	3 מטר
15.96 ק"מ	6371.02 ק"מ	20 מטר
25.24 ק"מ	6371.05 ק"מ	50 מטר

סעיף ב.2.

$$d(h) = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{h(2R + h)}$$

סעיף ב.3

הביטוי $\sqrt{2Rh}$ הוא קירוב טוב למרחק של האופק, זאת כאשר ערכי h קטנים יחסית ל R. תלמידים יכולים להגיע למסקנה זו על ידי בדיקה מספרית.

הסבר כללי:

בפתרון של סעיף א התלמידים עשויים לזהות בתרשים משמאל

כי $\triangle OMB$ שקודקודיו הם מרכז כדור הארץ (O), נקודה על קו האופק (M) והעין של הצופה (B) הוא משולש ישר זווית.

במשולש זה נתונים אורך היתר $OB = R + h$ (מרחק עין הצופה מהקרקע, R – רדיוס כדור הארץ) ואורך הניצב R.

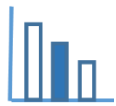
לפי משפט פיתגורס:

$$d = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{(R + h - R)(R + h + R)} = \sqrt{h(2R + h)}$$

$$6,371 \text{ ק"מ} = R \Leftarrow 6,371,000 \text{ מ' } \approx 64 \cdot 10^5 \text{ מ'}$$

$$\text{מכאן: } d \approx 4,382 \text{ מ' } \approx \sqrt{1.5 \cdot (2 \cdot 64 \cdot 10^5 + 1.5)} \text{ או } d \approx 4.4 \text{ ק"מ}$$

שימו לב: בפתרון לא הכרחי לעגל את הרדיוס כפי שמתואר למעלה.



משמעות הממצאים שהתקבלו: $d \approx 4,382$ מ' $\Leftarrow$ דנה הנמצאת על שפת הים יכולה לראות [את הסירה ששטה אל קו האופק] עד למרחק של כ-4.4 קילומטר.

בסעיף ב, לאחר מילוי הטבלה בסעיף ב1. התלמידים עשויים לשער כי הגודל h בגורם $(2R + h)$ שבנוסחה לחישוב המרחק $d = \sqrt{h(2R + h)}$ קטן משמעותית (עד לזניח) ביחס לגודל $2R$. ולכן הקירוב $d \approx \sqrt{2R \cdot h}$ הינו קירוב קביל. זאת לעומת הביטוי $2Rh$, שבו הגודל h אינו זניח.

$$d = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{(R + h - R)(R + h + R)} = \sqrt{h(2R + h)} \approx \sqrt{2R \cdot h}$$

משימה: כמה רחוק קו האופק - קירובים

תיאור סיטואציה

הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה

בין השמים לארץ או לים. קיומו של

קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ,

שבעטיה אין הצופה יכול לצפות בפני

כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק.

2. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

את רדיוס כדור הארץ ב- R (נניח כי $6,371$ ק"מ

$R =$

ונקודה על קו האופק M – זוהי נקודה שמבט

הראיה שלנו מופנה אליה.

3. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על

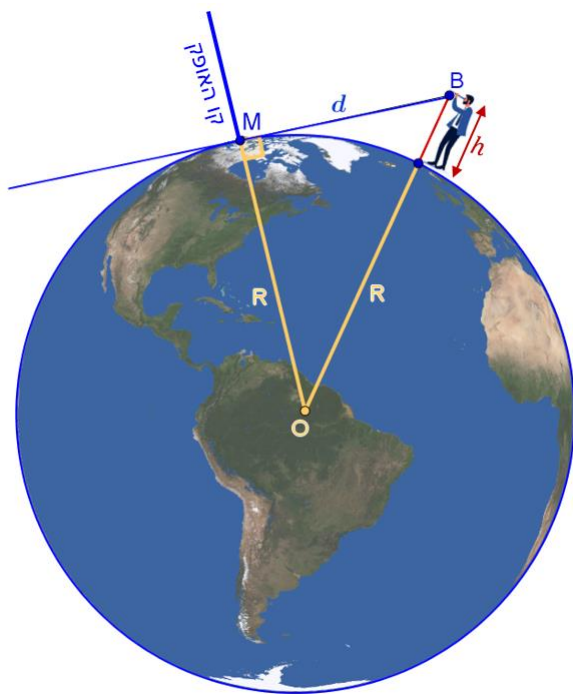
הסרטוט:

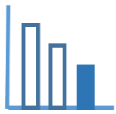
h - גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

d (BM) - המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

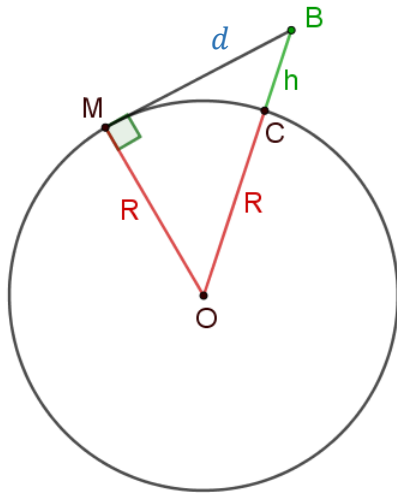
4. נתון כי המשולש $\triangle OMB$ שנוצר הוא משולש ישר זווית ($\angle M = 90^\circ$)

*במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.





פתרו את הבעיה הבאה



לפניכם סקיצה המתארת את הסיטואציה של מרחק צופה מקו האופק.

המעגל שמרכזו בנקודה O מייצג את כדור הארץ.

הנקודות O, B ו-C נמצאות על קו ישר אחד.

שימו לב: סקיצה משמעת סרטוט לא מדויק,

כך למשל, במציאות, רדיוס כדור הארץ (R)

גדול בהרבה יותר מגובה העיניים של הצופה (h).

א. בכל סעיף נתון ערכו של h .

חשבו בקירוב את ערכי הביטויים הרשומים:

d	$R + h$	h
		3 מטר
		20 מטר
		50 מטר

משלכם

ב. רוני עומד על מרפסת המגדל בגובה של 30 מ'.

גובה העיניים של רוני 1.8 מ'

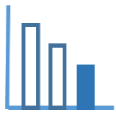
מה מרחקו של רוני מקו האופק?

הידעתם? נוסחאות לחישוב מרחק קו האופק שימושיות למשל בקביעת גובהו של מגדל תצפית,

או בקביעת המידה שבה על פריסקופ של צוללת לבלוט במים כדי לצפות בכלי שיט עוינים.

מקורות:

ויקיפדיה - אופק



פתרונות אפשריים

סעיף א:

בתרשים משמאל $\triangle OMB$ שקודקודיו הם מרכז כדור הארץ (O), נקודה על קו האופק (M) והעין של הצופה (B) הוא משולש ישר זווית. במשולש זה נתונים אורך היתר $OB = R + h$ (h מרחק עין הצופה מהקרקע, R – רדיוס כדור הארץ) ואורך הניצב R.

נתון $6,371 \text{ ק"מ} = R \leq 6,371,000 \text{ מ'}$

ניתן לחשב בעזרת משפט פיתגורס:

d	$R + h$	h
6182.72 מ'	6,371,003 מ'	3 מטר
15963.71 מ'	6,371,020 מ'	20 מטר
25240.84 מ'	6,371,050 מ'	50 מטר

סעיף ב

$$d \approx 20,129 \text{ מ'}$$

רוני העומד על מרפסת המגדל בגובה של 30 מ' יכול לראות עד למרחק של כ-20 קילומטר.