

מאור

מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



כמה רחוק קו האופק - גרפים

המשימה קיימת ב – 2 רמות



כל הזכויות שמורות ל
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו
או קטעים ממנה בשום אמצעי

פרטי התקשרות:

maor@labs.edu.haifa.ac.il

04-8288351



תעודת זהות של המשימה

נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה		משפט פיתגורס, קצב השתנות, קריאת גרף
כיתה		ט', י'
זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות)		45 דקות
ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה		פונקציה ותכונותיה, קריאת מידע מהגרפים, קצב השתנות של פונקציה
		פונקציה ותכונותיה, קריאת מידע מהגרפים, קצב השתנות של פונקציה משפט פיתגורס
אוריינות קונטקסטואלית		ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.
		ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.
ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם		מידע המוצג בטקסט ובתרשים מאפשר להשתמש במודל של מדרגות, לזהות כי קצב ההשתנות של הפונקציה אינו אחיד ולזהות את המגמה של השתנות.
הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה		בפתרון הבעיה נתעלם מהאליפטיות של כדור הארץ ונניח שהוא כדור עגול לחלוטין ברדיוס של 6,371 קילומטר. הערה: קיימת משימה נוספת: "כמה רחוק קו האופק קרובים". רצוי ללמד משימה זו ראשונה, אך לא הכרחי.

משימה: כמה רחוק קו האופק - גרפים

תיאור סיטואציה

הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה בין השמים לארץ או לים. קיומו של קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ, שבעטייה אין הצופה יכול לצפות בפני כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק.

2. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

את רדיוס כדור הארץ ב- R (נניח כי $R = 6,371$ ק"מ).
ונקודה על קו האופק M – זוהי נקודה שמבט הראיה שלנו מופנה אליה.

3. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על הסרטוט:

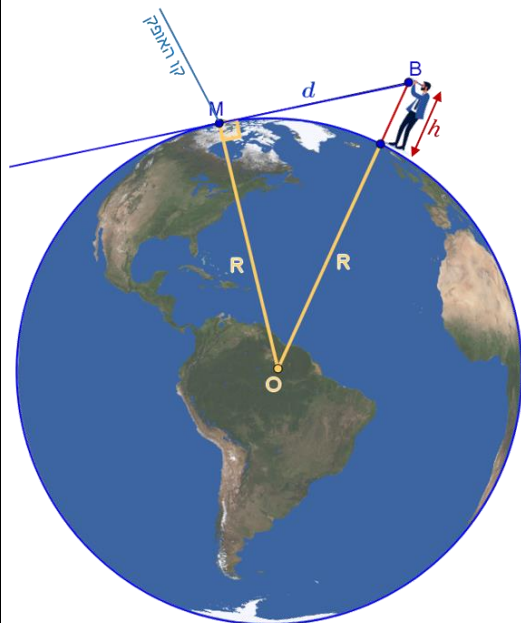
h – גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

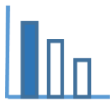
d (BM) – המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

4. נתון כי המשולש $\triangle OMB$ שנוצר הוא משולש ישר זווית

$$(\angle M = 90^\circ)$$

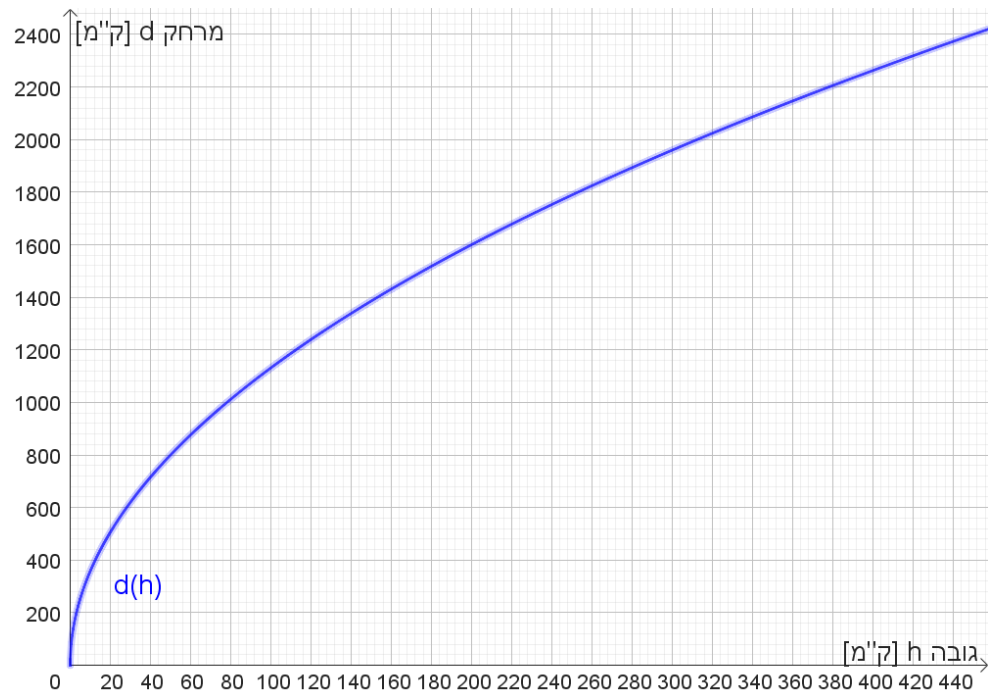
*במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.





פתרו את הבעיה הבאה

לפניכם גרף של הפונקציה $d(h)$ המתארת את מרחקו (d) (בק"מ) של צופה אל קו האופק, כתלות בגובה העין (h) (בק"מ) של הצופה מעל פני כדור הארץ.



א. תחנת חלל נמצאת בגובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ.

אסטרונוט בתחנה מסתכל לעבר כדור הארץ. באיזה מרחק ממנו נראה קו האופק? הסבירו כיצד קבעתם וסמנו נקודה מתאימה על הגרף.

ב. בשנת 2014 אלן יוסטס סגן נשיא בחברת גוגל,

קבע את שיא העולם לנפילה חופשית מגובה של כ-41 ק"מ.

1. חשבו מה היה המרחק של אלן יוסטס אל קו האופק.

2. סמנו נקודה מתאימה על גרף הפונקציה.

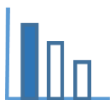
3. בכמה רחוק יותר (בערך) המרחק שרואה האסטרונוט הנמצא בתחנת החלל,

מאשר המרחק שרואה אלן יוסטס בתחילת הנפילה?

ג. 1. אפיינו את קצב ההשתנות של הפונקציה $d(h)$.

2. תארו לפחות שתי תכונות נוספות של הפונקציה $d(h)$ בהסתמך על הגרף.

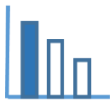
כיצד תכונות אלה באות לידי ביטוי בחיי היומיום?



הידעתם? נוסחאות לחישוב מרחק קו האופק שימושיות, למשל בקביעת גובהו של מגדל תצפית, או בקביעת המידה שבה על פריסקופ של צוללת לבלוט במים, כדי לצפות בכלי שיט עוינים.

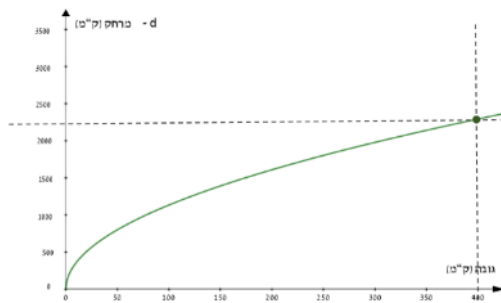
מקורות:

ויקיפדיה - אופק



פתרונות אפשריים

בבעיה זו התלמידים יוכלו להסביר את ממצאיהם בהקשר לשאלה [כמה רחוק אנחנו יכולים לראות?], להסיק מסקנות נוספות ולקשר אותן לחיי היומיום. זאת באמצעות ייצוג גרפי של הפונקציה המתארת את מרחקו של צופה אל קו האופק d (בק"מ) כפונקציית גובה הצופה h (בק"מ) מעל פני כדור הארץ.

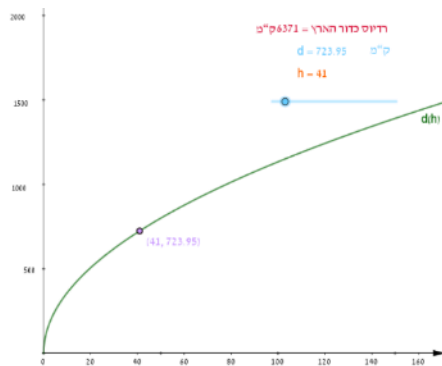


סעיף א: תלמידים עשויים לסמן את הנקודה על הגרף המתאימה לנתונים – גובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ ולאמוד כי אסטרונוט הנמצא בתחנת החלל יכול לראות במרחק כ-2,300 ק"מ את קו האופק.

סעיף ב1: בסעיף זה על התלמידים לחשב את מרחק קו האופק על פי משפט פיתגורס:

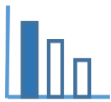
$$d = \sqrt{(6,371 + 41)^2 - 6,371^2} \sim 724 \text{ ק"מ}$$

סעיף ב2: על התלמידים לסמן מקום משוער של הנקודה על הגרף ששיעור ה- x שלה מתאים לגובה 41 ק"מ.



סעיף ב3: תלמידים ימצאו שאסטרונוט הנמצא בתחנת החלל רואה רחוק יותר בערך ב-1,600 ק"מ מאשר אלן יוסטס. התשובה המדויקת במקרה זה פחות חשובה, אלא אומדן המרחקים והבנת המתרחש.

סעיף ג1: תלמידים יזהו כי קצב ההשתנות של הפונקציה אינו קבוע, הוא קטן ככל ש- h גדל. התלמידים עשויים לסמן שלוש נקודות על הגרף ולהראות כי נקודות אלה לא נמצאות על אותו הקו הישר. יהיו אולי תלמידים שירצו לסרטט מדרגות בעלות רוחב זהה ולזהות את השינוי בגובה של המדרגה, ככל ש- h גדל.



סעיף ג2: תשובות אפשריות:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה $h > 0$.
מדובר בגובה הצופה מעל פני כדור הארץ ולכן מדובר על הערכים החיוביים.
ממצא זה מתאים לחיי היומיום, אבל כמובן עולות השאלות, למשל:
האם ייתכן מצב של $h = 0$?
עד איזה גובה הצופה יכול להגיע? הרי מבחינת הפונקציה אין הגבלה, אבל מבחינת חיי היומיום יש. למשל, ייתכן מצב שהצופה נמצא בתחנת חלל, כלומר בגובה של כ-400 ק"מ מעל פני כדור הארץ. האם ניתן לדבר על גובה מקסימאלי?
 2. טווח הערכים של הפונקציה הוא: $d > 0$.
 3. הצופה שנמצא בתחנת חלל יכול לראות את קו האופק במרחק של כ-2,293 ק"מ.
 4. הפונקציה $d(h)$ חיובית לכל $h > 0$
 5. הפונקציה $d(h)$ עולה לכל $h > 0$
- ככל שהצופה נמצא גבוה יותר, כך הוא יכול לראות רחוק יותר.

משימה: כמה רחוק קו האופק - גרפים

תיאור סיטואציה

הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה בין השמים לארץ או לים. קיומו של

קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ, שבעטייה אין הצופה יכול לצפות בפני

כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק.

2. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

את רדיוס כדור הארץ ב- R (נניח כי $R = 6,371$ ק"מ).

ונקודה על קו האופק M – זוהי נקודה שמבט הראיה

שלנו מופנה אליה.

5. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על הסרטוט:

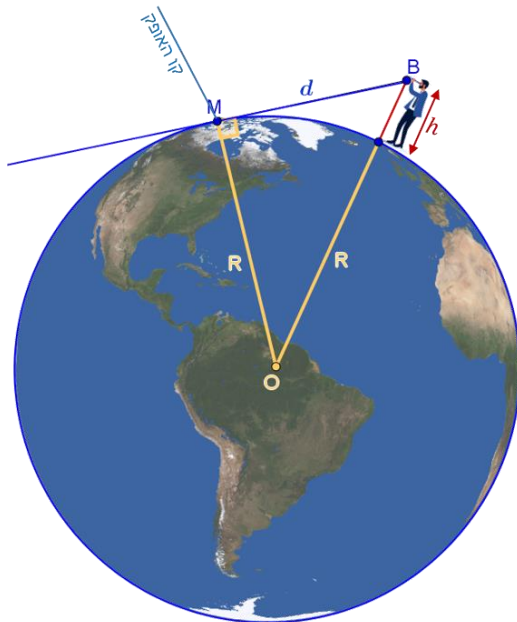
h - גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

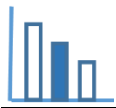
d (BM) - המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

3. נתון כי המשולש $\triangle OMB$ שנוצר הוא משולש ישר זווית

$$(\angle M = 90^\circ)$$

*במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.



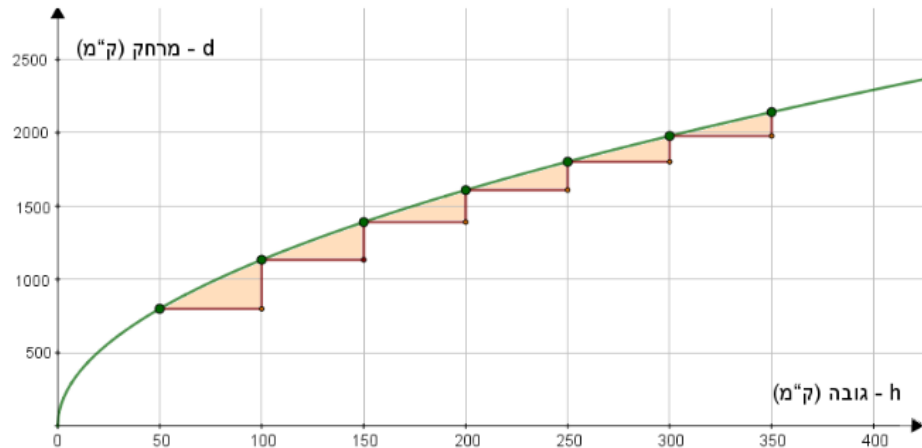


פתרו את הבעיה הבאה

לפניכם גרף של הפונקציה המתארת את מרחקו של צופה אל קו האופק כתלות בגובה העין של הצופה מעל פני כדור הארץ.

בגרף מצוירות שש מדרגות בעלות רוחב זהה.

התבוננו בגרף וענו על השאלות הבאות:



א. תחנת החלל נמצאת בגובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ.

כמה רחוק רואה אסטרונוט הנמצא בתחנה?

הסבירו כיצד קבעתם וסמנו נקודה מתאימה על הגרף.

ב. בשנת 2014 אלן יוסטס סגן נשיא בחברת גוגל,

קבע את שיא העולם לנפילה חופשית מגובה של כ-41 ק"מ.

כמה רחוק יכול היה לראות אלן יוסטס בתחילת המסלול?

סמנו את הטענה הנכונה:

בעת הצניחה אלן יכול היה לראות את קו האופק:

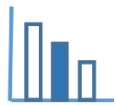
☞ במרחק של כ-41 ק"מ ☞ במרחק של כ-500 ק"מ

☞ במרחק של כ-700 ק"מ ☞ במרחק של כ-1,000 ק"מ

ג. 1. אפיינו את קצב ההשתנות של הפונקציה $d(h)$.

2. תארו לפחות שתי תכונות שונות נוספות של הפונקציה $d(h)$ בהסתמך על הגרף.

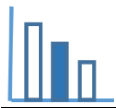
ד. כיצד תכונות אלה באות לידי ביטוי בחיי היומיום?



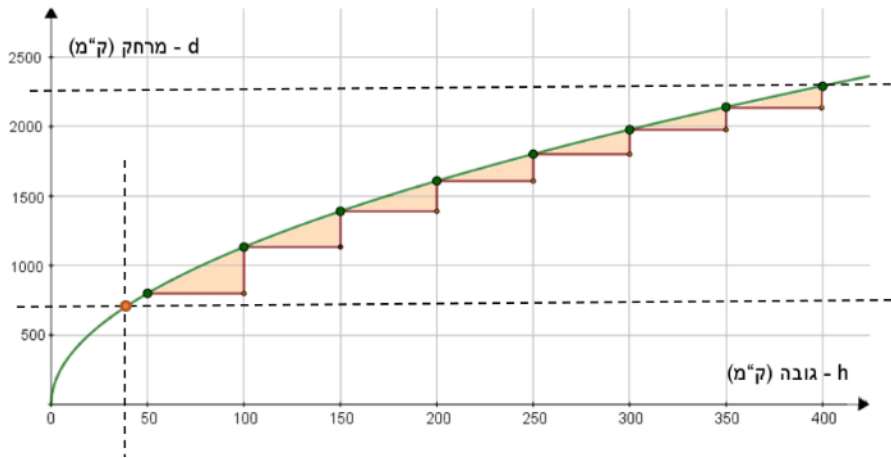
הידעתם? נוסחאות לחישוב מרחק קו האופק שימושיות, למשל בקביעת גובהו של מגדל תצפית, או בקביעת המידה שבה על פריסקופ של צוללת לבלוט במים, כדי לצפות בכלי שיט עוינים.

מקורות:

[ויקיפדיה - אופק](#)



פתרונות אפשריים



סעיף א: תלמידים יסמנו את

הנקודה המתאימה לנתון

ק"מ $h = 400$ וכדי לאמוד

את המרחק יסרטטו קו

מקביל לציר ה- x .

לפי הגרף ניתן לראות כי הקו

עובר קצת מעל אמצע הקטע

$(2,000; 2,500)$. כלומר

אסטרונאוט הנמצא בתחנה

רואה את קו האופק במרחק של

כ- ק"מ $d \approx 2,300$.

סעיף ב: על התלמידים לזהות כי התשובה המתאימה ביותר הינה כ- 700 ק"מ. ערך ה- d של הנקודה

המתאימה לגובה של 41 ק"מ נמצא בין $(500; 1,000)$.

סעיף ג: 1. תחום ההגדרה של הפונקציה $h > 0$.

מדובר בגובה הצופה מעל פני כדור הארץ ולכן מדובר על הערכים החיוביים.

2. טווח הערכים של הפונקציה הוא: $d > 0$.

3. הפונקציה $d(h)$ חיובית לכל $h > 0$.

4. הפונקציה $d(h)$ עולה לכל $h > 0$.

5. קצב ההשתנות של הפונקציה הולך וקטן.

סעיף ד: ככל שהצופה נמצא גבוה יותר, כך הוא יכול לראות רחוק יותר.