

מאור

מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



אנומליה של המים - צפיפות ופרבולה

המשימה קיימת ב – 2 רמות



©

כל הזכויות שמורות ל
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו
או קטעים ממנה בשום אמצעי

פרטי התקשרות:

maor@labs.edu.haifa.ac.il



04-8288351



תעודת זהות של המשימה

| | |
|---|--|
| קריאת גרף, פונקציה ריבועית | נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה |
| ט' | כיתה |
| 45 דקות | זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות) |
| קריאת גרף ייצוג קודקודי לפונקציה ריבועית חישוב ערכים של פונקציה ריבועית על ידי הצבה בייצוג הקודקודי שלה. | ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה |
| קריאת גרף מציאת ייצוג אלגברי (ייצוג קודקודי) לפונקציה ריבועית על פי קודקוד ונקודת חיתוך עם ציר Y. פתרון משוואה ריבועית בייצוג קודקודי | |
| הבנת המושג צפיפות חומר ויחידות מידה של צפיפות. | אוריינות קונטקסטואלית |
| הבנת המושג צפיפות חומר ויחידות מידה של צפיפות. | |
| קריאת גרף והסקת מסקנות מהגרף הבנת הייצוג הקודקודי של פונקציה ריבועית | ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם |
| קריאת גרף והסקת מסקנות ממנו. מציאת ייצוג אלגברי לפונקציה ריבועית, ובחירת הייצוג המתאים. | |



| | | |
|--|---|---|
| <p>לאחר קריאת תיאור הסיטואציה, דיון קצר בכתה להבהרת המושג צפיפות ויחידות המידה של צפיפות. סרטון על צפיפות https://www.youtube.com/watch?v=SWS1iYgjnww עבודה בקבוצות של 2-3 תלמידים. דיון בכתה לאחר פתרון סעיף א' ו' ב'. לאחר מכן (אם לא נותר מספיק זמן) מעבר לפתרון סעיף ד ודיון בו. סעיף ג' ניתן לתת כשיעורי בית. ניתן לשאול את התלמידים האם הם מכירים תופעות טבע נוספות הקשורות לאנומליה של המים.</p> |  | <p>הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה</p> |
| <p>לאחר קריאת תיאור הסיטואציה, דיון קצר בכתה להבהרת המושג צפיפות ויחידות המידה של צפיפות. עבודה בקבוצות של 2-3 תלמידים. דיון בכתה לאחר פתרון סעיף א. הצגת דרכי פתרון. לאחר מכן (אם לא נותר מספיק זמן) מעבר לפתרון סעיף ד ודיון בו. סעיפים ב' ו' ג' ניתן לתת כשיעורי בית. ניתן לשאול את התלמידים האם הם מכירים תופעות טבע נוספות הקשורות לאנומליה של המים.</p> |  | |

משימה: אנומליה של המים - צפיפות ופרבולה

תיאור סיטואציה

כמות חומר המצויה בגוף כלשהו נמדדת ביחידות של קילוגרם (ק"ג) או גרם, מיליגרם, טון ועוד. **צפיפות חומר** היא כמות החומר ליחידת נפח. הצפיפות נמדדת ביחידות של כמות החומר לנפח, כלומר בגרם לסמ"ק (gr/cm^3) או ב- ק"ג למ"ק (kg/m^3) וכו'.

<https://www.youtube.com/watch?v=SWS1iYgjynw> (סרטון)



שמן צף על מים

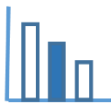
חומר שצפיפותו קטנה יותר, צף על גבי נוזל שצפיפותו גדולה יותר. שמן צף על פני המים, ענף צף על פני המים ואילו אבן שוקעת במים.

כאשר מחממים חומר, כמות החומר אינה משתנה, אבל צפיפותו משתנה. כמעט בכל החומרים הצפיפות קטנה כאשר הטמפרטורה עולה.



שמן קפוא שוקע בתוך שמן נוזלי

כאשר מקררים חומר בדרך כלל צפיפותו גדלה. למשל, כשמקפאים שמן צפיפותו גדלה. שמן קפוא צפיפותו גדולה יותר מצפיפות שמן נוזלי. ולכן אם נכניס קוביית שמן קפוא לתוך שמן נוזלי, הקובייה תשקע. יוצאי דופן מבחינה זו הם מים.



פתרו את הבעיה הבאה

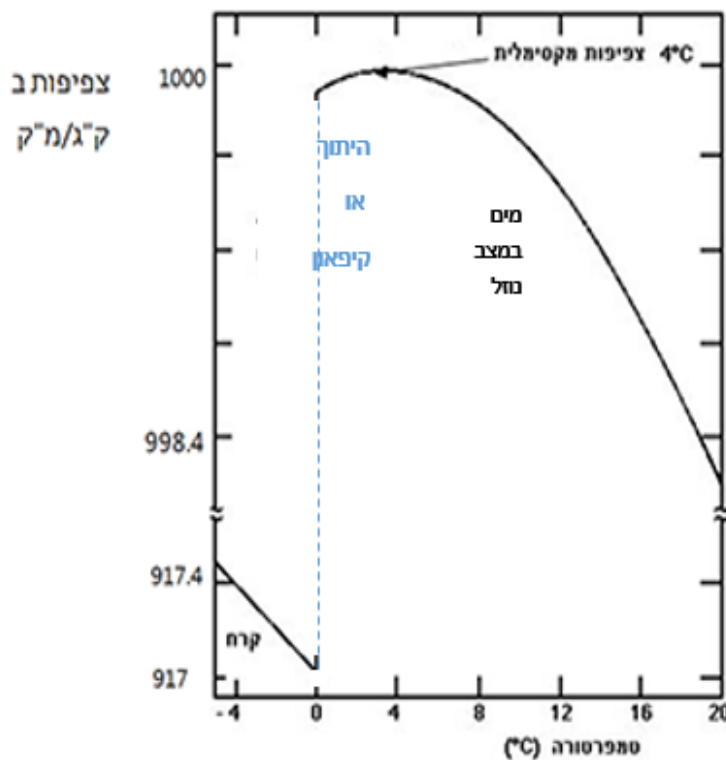
לפניכם גרף המתאר את התלות בין צפיפות של מים מתוקים לטמפרטורה של המים, וכן את התלות בין צפיפות של קרח לטמפרטורה של הקרח. התבוננו בגרף וענו על השאלות הבאות:

הערות:

בתשובות המספריות לשאלות הבאות עליכם לתת תשובות עם דיוק של **6 ספרות** אחרי הנקודה העשרונית.

צפיפות מים מתוקים ב- 0°C היא $999.87 \frac{\text{ק"ג}}{\text{מ"ק}}$.

פרבולה היא קירוב טוב לגרף של צפיפות המים כתלות בטמפרטורה בתחום: $0^{\circ}\text{C} \leq t \leq 14^{\circ}\text{C}$.



הערה: שימו לב לסימון \approx המציין "קפיצה" בערכי הצפיפות – בין 917.4 לבין 998.4 שפירושה שקנה המידה אינו אחיד.

א. מצאו ביטוי אלגברי לפרבולה זו.

פרטו חישוביכם. תוכלו להיעזר בייצוג קודקודי של פרבולה וביישומן המצורף.

ב. חשבו מהי (בקירוב) הצפיפות

של מים מתוקים בטמפרטורה של 2°C . הציגו את פתרונותיכם.

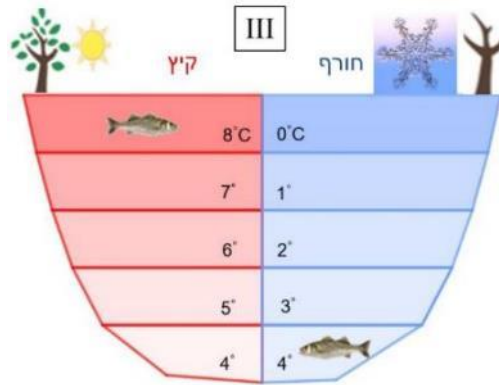
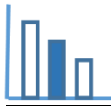
תוכלו להיעזר ביישומן המצורף.

ג. חשבו מהי (בקירוב)

הטמפרטורה של מים מתוקים שהצפיפות שלהם היא 999.48

$\frac{\text{ק"ג}}{\text{מ"ק}}$? הציגו את פתרונותיכם.

תוכלו להיעזר ביישומן המצורף.



ד. האיור הבא (III) מסביר מדוע דגים יכולים להתקיים באגמים עמוקים הקופאים בחורף. הסבירו את התופעות המתוארות באיור.

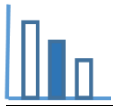
מקורות

[האנומליה של המים](#)

[צפיפות](#)

[צפיפות המים](#)

[גרף - מאפיינים פיזיקליים של המים](#)



פתרונות אפשריים

א. מציאת ביטוי אלגברי לפונקציה הריבועית $f(t)$.

הדרך העדיפה והפשוטה ביותר היא בעזרת הייצוג הקודקודי:

$$f(t) = a(t - 4)^2 + 1000$$

$$999.87 = a(0 - 4)^2 + 1000$$

$$a = -0.008125$$

$$f(t) = -0.008125(t - 4)^2 + 1000$$

ישנן דרכים נוספות למציאת ביטוי אלגברי לפונקציה הריבועית, כפי שמפורט בהמשך:

ב. $f(2) = \frac{\text{ק"ג}}{\text{מ"ק}} 999.9675$

ג. $-0.008125(t - 4)^2 + 1000 = 999.48$

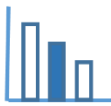
$$(t - 4)^2 = \frac{999.48 - 1000}{-0.008125} = 64$$

$$t - 4 = 8 \text{ או } t - 4 = -8$$

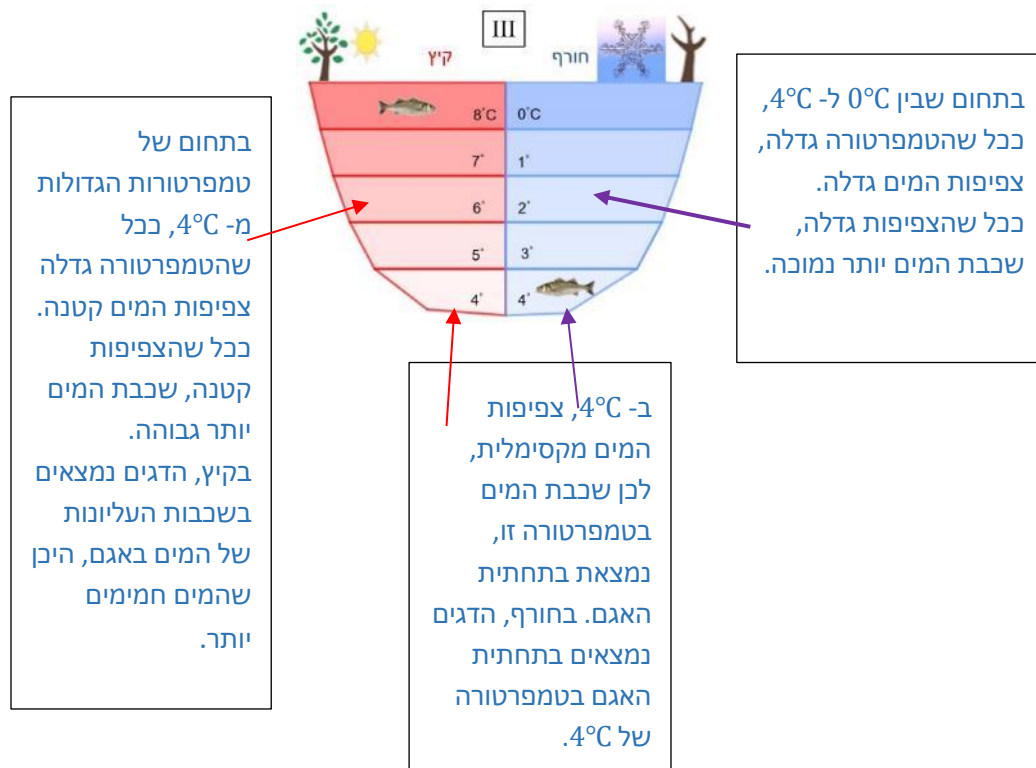
$$t = 12 \text{ או } t = -4$$

$t = -4$ אינו נמצא בתחום הנתון, ולכן אינו מתקבל.

ב- 12°C צפיפות המים היא בקירוב 999.48 ק"ג/מ"ק



ד. הדגים בחורף יכולים לתחתית האגם היכן שהטמפרטורה של המים היא 4°C (איור III) בקיץ המים מתחממים מעבר ל- 4°C . בטמפרטורות אלה ככל שהטמפרטורה גבוהה יותר צפיפות המים קטנה. השכבה העליונה באגם היא בטמפרטורה הגבוהה ביותר- כיוון שצפיפות המים בשכבה זו היא הקטנה ביותר. ובתחתית האגם שכבת המים בטמפרטורה של 4°C שצפיפות המים בה היא מקסימלית.



משימה: אנומליה של המים - צפיפות ופרבולה

תיאור סיטואציה

כמות חומר המצויה בגוף כלשהו נמדדת ביחידות של קילוגרם (ק"ג) או גרם, מיליגרם, טון ועוד. **צפיפות חומר** היא כמות החומר ליחידת נפח. הצפיפות נמדדת ביחידות של כמות החומר לנפח, כלומר בגרם לסמ"ק (gr/cm^3) או ב-ק"ג למ"ק (kg/m^3) וכו'.

(סרטון) <https://www.youtube.com/watch?v=SWS1iYgjynw>



שמן צף על מים

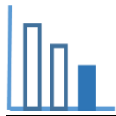
חומר שצפיפותו קטנה יותר, צף על גבי נוזל שצפיפותו גדולה יותר. שמן צף על פני המים, ענף צף על פני המים ואילו אבן שוקעת במים.

כאשר מחממים חומר, כמות החומר אינה משתנה, אבל צפיפותו משתנה. כמעט בכל החומרים הצפיפות קטנה כאשר הטמפרטורה עולה.



שמן קפוא שוקע בתוך שמן נוזלי

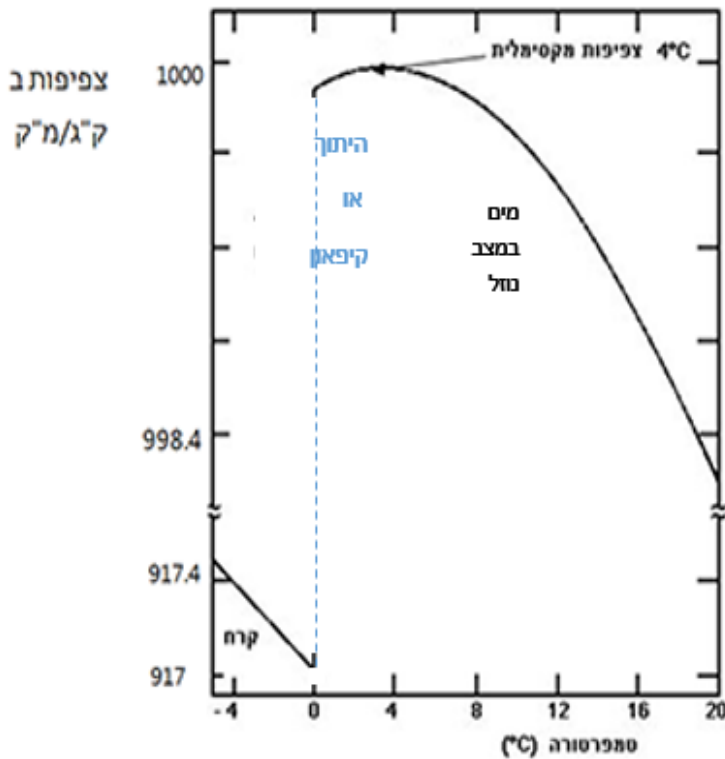
כאשר מקררים חומר בדרך כלל צפיפותו גדלה. למשל, כשמקפאים שמן צפיפותו גדלה. שמן קפוא צפיפותו גדולה יותר מצפיפות שמן נוזלי. ולכן אם נכניס קוביית שמן קפוא לתוך שמן נוזלי, הקובייה תשקע. יוצאי דופן מבחינה זו הם מים.



פתרו את הבעיה הבאה

לפניכם גרף המתאר את התלות בין צפיפות של מים מתוקים לטמפרטורה של המים, וכן את התלות בין צפיפות של קרח לטמפרטורה של הקרח.

התבוננו בגרף וענו על השאלות הבאות:



הערה: שימו לב לסימון \approx המציין "קפיצה" בערכי הצפיפות - בין 917.4 לבין 998.4 שפירושה שקנה המידה אינו אחיד.

א. מהי הצפיפות המקסימלית של המים?

ב. הפרבולה הבאה בייצוג קודקודי:

$$f(t) = -0.008125(t - m)^2 + n$$

היא קירוב לגרף של צפיפות המים

כתלות בטמפרטורה בתחום:

$$0^\circ\text{C} \leq t \leq 14^\circ\text{C}$$

השלימו את ערכי m ו- n .

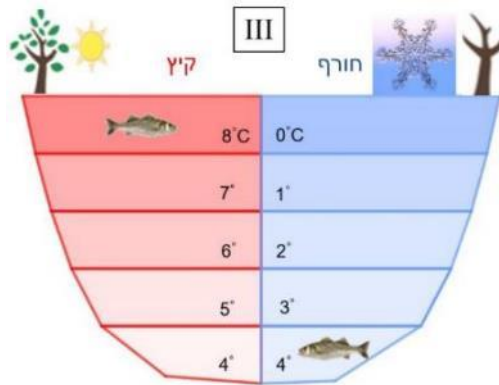
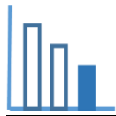
ג. חשבו מהי (בקירוב) צפיפות של

מים מתוקים בטמפרטורה

של 0°C ושל 2°C .

הציגו את פתרונותיכם.

תוכלו להיעזר ביישומון המצורף.



ד. התבוננו באיור הבא (III):

1. הסבירו מדוע דגים יכולים להתקיים באגמים עמוקים הקופאים בחורף.

2. הסבירו מדוע גם בקיץ וגם בחורף שכבת המים התחתונה באגם היא בטמפרטורה של 4°C ?

3. הסבירו מדוע בקיץ שכבת המים העליונה היא בטמפרטורה של 8°C ואילו בחורף השכבה העליונה באגם היא בטמפרטורה של 0°C ?

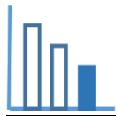
מקורות

[האנומליה של המים](#)

[צפיפות](#)

[צפיפות המים](#)

[גרף - מאפיינים פיזיקליים של המים](#)



פתרונות אפשריים

א. הצפיפות המקסימלית של המים היא 1000 ק"ג/מ"ק

ב. $f(t) = -0.008125(t - 4)^2 + 1000$

ג. $f(2) = \frac{\text{ק"ג}}{\text{מ"ק}} 999.9675$ $f(0) = \frac{\text{ק"ג}}{\text{מ"ק}} 999.87$

ד. הדגים בחורף יכולים לחיות בתחתית האגם היכן שהטמפרטורה של המים היא 4°C (איור III)

בקיץ המים מתחממים מעבר ל- 4°C . בטמפרטורות אלה ככל שהטמפרטורה גבוהה יותר צפיפות המים קטנה. השכבה העליונה באגם היא בטמפרטורה הגבוהה ביותר - כיוון שצפיפות המים בשכבה זו היא הקטנה ביותר. ובתחתית האגם שכבת המים בטמפרטורה של 4°C שצפיפות המים בה היא מקסימלית.

