

# מאור

## מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



## כמה רחוק קו האופק - גרפים

המשימה קיימת ב – 2 רמות



כל הזכויות שמורות ל  
לייקין ר. וצוות מאור, אוניברסיטת חיפה

אין להעתיק, לצלם או לשכפל חוברת זו  
או קטעים ממנה בשום אמצעי





פרטי התקשרות:

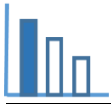
[maor@labs.edu.haifa.ac.il](mailto:maor@labs.edu.haifa.ac.il)

04-8288351



## תעודת זהות של המשימה

משפט פיתגורס, קצב השתנות, קריאת גרף		נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה
ט', י'		כיתה
45 דקות		זמן נדרש ליישום המשימה (עד 45 דקות)
פונקציה ותכונותיה, קריאת מידע מהגרפים, קצב השתנות של פונקציה		ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה
פונקציה ותכונותיה, קריאת מידע מהגרפים, קצב השתנות של פונקציה		
ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.		אוריינות קונטקסטואלית
ידע כללי לגבי המושגים הקשורים לחיי היומיום, כמו קו האופק, עקמומיות של כדור הארץ.		
מידע המוצג בטקסט ובתרשים מאפשר להשתמש במודל של מדרגות, לזהות כי קצב ההשתנות של הפונקציה אינו אחיד ולזהות את המגמה של השתנות.		ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם
בפתרון הבעיה נתעלם מהאליפטיות של כדור הארץ ונניח שהוא כדור עגול לחלוטין ברדיוס של 6,371 קילומטר		הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה



## משימה: כמה רחוק קו האופק - גרפים

### תיאור סיטואציה

#### הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה בין השמים לארץ או לים. קיומו של

קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ, שבעטיה אין הצופה יכול לצפות בפני

כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק.

2. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

את רדיוס כדור הארץ ב- $R$  (נניח כי  $R = 6,371$  ק"מ).

ונקודה על קו האופק  $M$  – זוהי נקודה שמבט הראיה

שלנו מופנה אליה.

3. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על הסרטוט:

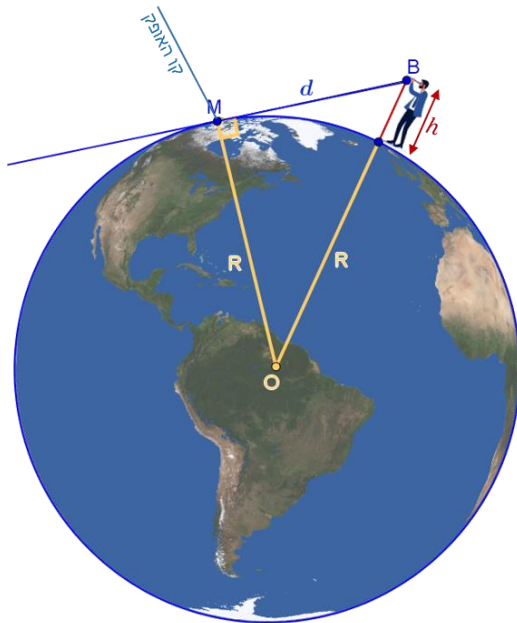
$h$  - גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

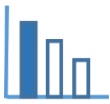
$d$  (BM) - המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

4. נתון כי המשולש  $\triangle OMB$  שנוצר הוא משולש ישר זווית

$$(\angle M = 90^\circ)$$

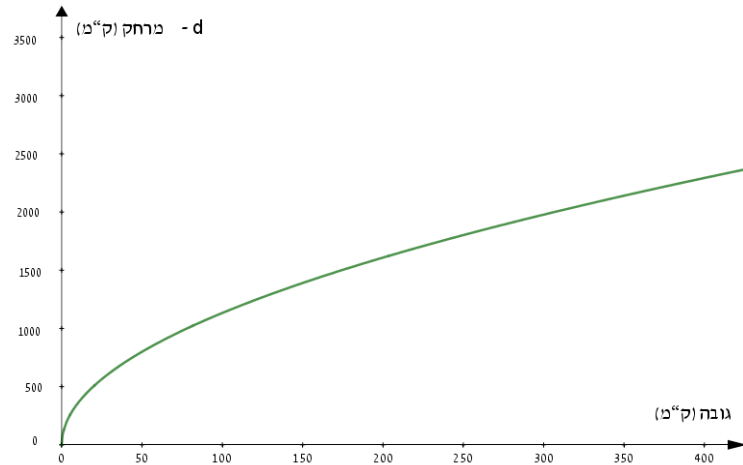
\* במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.





## פתרו את הבעיה הבאה

נתון גרף הפונקציה  $d(h)$  המתארת מרחקו של צופה אל קו האופק  $d$  (בק"מ), כפונקציה של גובה עין של הצופה  $h$  (בק"מ) מעל פני כדור הארץ.



א. תחנת החלל נמצאת בגובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ.

כמה רחוק רואה אסטרונוט הנמצא בתחנה?

הסבירו כיצד קבעתם וסמנו נקודה מתאימה על הגרף.

ב. בשנת 2014 אלן יוסטס סגן נשיא בחברת גוגל,

קבע את שיא העולם לנפילה חופשית מגובה של כ-41 ק"מ.

1. סמנו נקודה מתאימה על גרף הפונקציה.

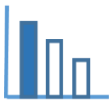
2. בכמה רחוק יותר (בערך) המרחק שרואה האסטרונוט הנמצא בתחנת החלל

מאשר אלן יוסטס בתחילת המסע?

ג. 1. אפיינו את קצב ההשתנות של הפונקציה  $d(h)$ .

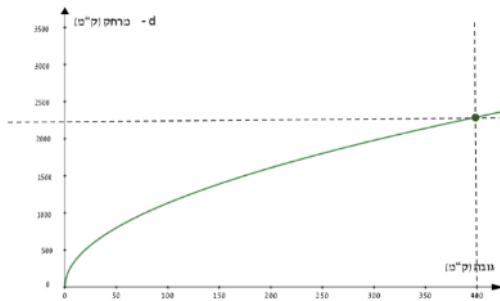
2. תארו לפחות שתי תכונות שונות נוספות של הפונקציה  $d(h)$  בהסתמך על הגרף.

כיצד תכונות אלה באות לידי ביטוי בחיי היומיום?



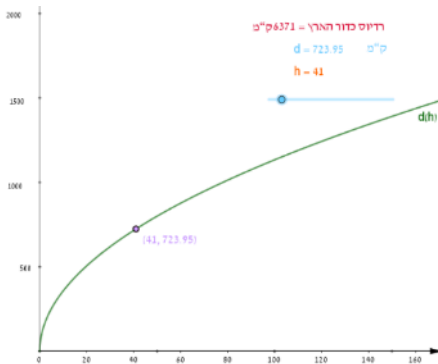
## פתרונות אפשריים

בבעיה זו התלמידים יוכלו להסביר את ממצאיהם בהקשר לשאלה [כמה רחוק אנחנו יכולים לראות?], להסיק מסקנות נוספות ולקשר אותן לחיי היומיום. זאת באמצעות ייצוג גרפי של הפונקציה המתארת את מרחקו של צופה אל קו האופק  $d$  (בק"מ) כפונקציית גובה הצופה  $h$  (בק"מ) מעל פני כדור הארץ.



**סעיף א:** תלמידים עשויים לסמן את הנקודה על הגרף המתאימה לנתונים – גובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ ולאמוד כי אסטרונוט הנמצא בתחנת החלל יכול לראות במרחק כ-2,300 ק"מ את קו האופק. תלמידים שפתרו את השאלה "כמה רחוק קו האופק – קרובים" ירצו אולי לאמת את הממצאים עם הביטויים האלגבריים המתאימים.

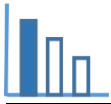
כלומר,  $d = \sqrt{h(2R + h)}$ , או,  $d \approx \sqrt{2R \cdot h}$  ( כאשר  $R = 6,371$  ק"מ ).



**סעיף ב1:** תלמידים מזומנים לסמן מקום משוער של הנקודה על ציר ה- $x$  שמתאימה לגובה 41 ק"מ. ייתכן ויהיו תלמידים שיתקשו לעשות זאת על הגרף הנתון. תלמידים אלה יכולים לפנות ליישומן המאפשר שינוי קנה מידה.

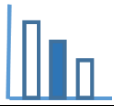
**סעיף ב2:** תלמידים ימצאו שאסטרונוט הנמצא בתחנת החלל רואה רחוק יותר בערך ב-1,600 ק"מ מאשר אלן יוסטס. התשובה המדויקת במקרה זה פחות חשובה, אלא אומדן המרחקים והבנת המתרחש.

**סעיף ג1:** תלמידים יזהו כי קצב ההשתנות של הפונקציה אינו קבוע, הוא קטן ככל ש- $h$  גדל. התלמידים עשויים לסמן שלוש נקודות על הגרף ולהראות כי נקודות אלה לא נמצאות על אותו הקו הישר. יהיו אולי תלמידים שירצו לסרטט מדרגות בעלות רוחב זהה ולזהות את השינוי בגובה של המדרגה, ככל ש- $h$  גדל.



סעיף ג2: תשובות אפשריות:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה  $h \geq 0$ .  
מדובר בגובה הצופה מעל פני כדור הארץ ולכן מדובר על הערכים החיוביים.  
ממצא זה מתאים לחיי היומיום, אבל כמובן עולות השאלות, למשל:  
האם ייתכן מצב של  $h = 0$ ?  
עד איזה גובה הצופה יכול להגיע? הרי מבחינת הפונקציה אין הגבלה, אבל מבחינת חיי היומיום יש. למשל, ייתכן מצב שהצופה נמצא בתחנת חלל, כלומר בגובה של כ-400 ק"מ מעל פני כדור הארץ. האם ניתן לדבר על גובה מקסימאלי?
  2. טווח הערכים של הפונקציה הוא:  $d \geq 0$ . המסקנות לגבי תחום ההגדרה של הפונקציה בהקשר לסיטואציות אפשריות, עשויות להיות יעילות בתשובה לשאלה בנוגע לטווח הערכים.  
הצופה שנמצא בתחנת חלל יכול לראות את קו האופק במרחק של כ-2,293 ק"מ.
  3. הפונקציה  $d(h)$  חיובית לכל  $h > 0$
  4. הפונקציה  $d(h)$  עולה לכל  $h > 0$
- ככל שהצופה נמצא גבוה יותר, כך הוא יכול לראות רחוק יותר.



## משימה: כמה רחוק קו האופק - גרפים

### תיאור סיטואציה

#### הגדרות יסוד:

1. **קו האופק** הוא קו ראייה אופקי שהוא בגובה העיניים של הצופה.

קו האופק עובר במקום המפגש הדמיוני הנצפה בין השמים לארץ או לים. קיומו של קו האופק נובע מעקמומיות פני כדור הארץ, שבעטייה אין הצופה יכול לצפות בפני כדור הארץ מעבר לקו מסוים, הוא קו האופק.

2. נסמן בסרטוט (ראו תרשים משמאל):

את רדיוס כדור הארץ ב- $R$  (נניח כי  $R = 6,371$  ק"מ).  
ונקודה על קו האופק  $M$  – זוהי נקודה שמבט הראיה שלנו מופנה אליה.

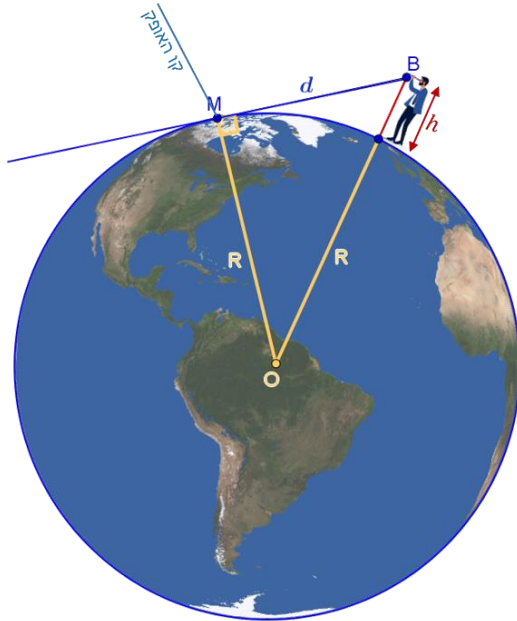
5. נגדיר את המשתנים ונסמן גם אותם על הסרטוט:

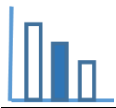
$h$  - גובה עיניו של הצופה מעל פני כדור הארץ.

$d$  (BM) - המרחק (בקו ישר) אל נקודה על קו האופק.

3. נתון כי המשולש  $\triangle OMB$  שנוצר הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle M = 90^\circ$ )

\*במציאות כדור הארץ אינו כדור מושלם.



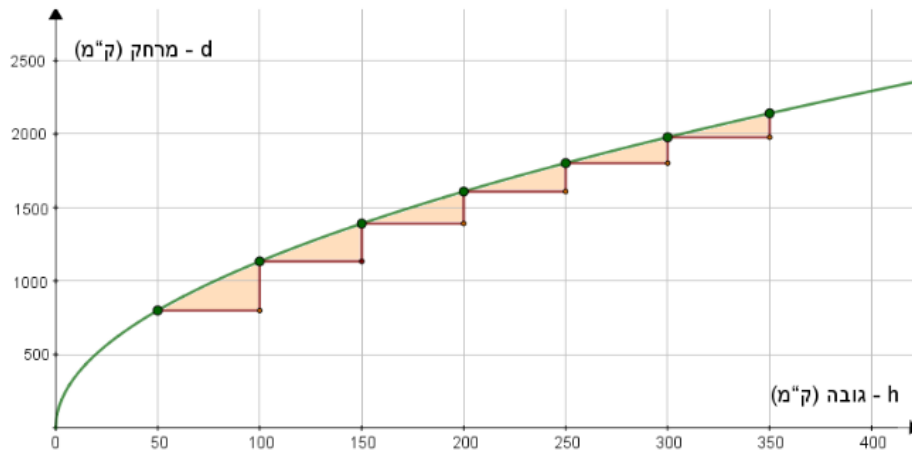


### פתרו את הבעיה הבאה

לפניכם גרף של הפונקציה המתארת את מרחקו של צופה אל קו האופק כתלות בגובה העין של הצופה מעל פני כדור הארץ.

בגרף מצוירות שש מדרגות בעלות רוחב זהה.

התבוננו בגרף וענו על השאלות הבאות:



א. תחנת החלל נמצאת בגובה של כ-400 קילומטר מעל פני כדור הארץ.

כמה רחוק רואה אסטרונווט הנמצא בתחנה?

הסבירו כיצד קבעתם וסמנו נקודה מתאימה על הגרף.

ב. בשנת 2014 אלן יוסטס סגן נשיא בחברת גוגל,

קבע את שיא העולם לנפילה חופשית מגובה של כ-41 ק"מ.

כמה רחוק יכול היה לראות אלן יוסטס בתחילת המסלול?

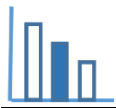
סמנו את הטענה הנכונה:

בעת הצניחה אלן יכול היה לראות את קו האופק:

במרחק של כ-41 ק"מ  במרחק של כ-500 ק"מ

במרחק של כ-700 ק"מ  במרחק של כ-1,000 ק"מ





### פתרונות אפשריים

**סעיף א:** תלמידים יסמנו את הנקודה המתאימה לנתון ק"מ  $h = 400$  וכדי לאמוד את המרחק יסרטטו קו מקביל

לציר ה-x.

לפי הגרף ניתן לראות כי הקו

עובר קצת מעל אמצע הקטע

$(2,000; 2,500)$ . כלומר

אסטרונואוט הנמצא בתחנה

רואה את קו האופק במרחק של

כ-ק"מ  $d \approx 2,300$ .

**סעיף ב:** על התלמידים לזהות כי

התשובה המתאימה ביותר הינה כ-700 ק"מ. ערך ה-d של הנקודה המתאימה לגובה של 41 ק"מ נמצא בין

$(500; 1,000)$ .

