



למורה

מאור – מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים

# הצעה לבניית גשר קשתות

המשימה קיימת ב-2 רמות:



© כל הזכויות שמורות למכון ויצמן למדע – המחלקה להוראת המדעים  
החומרים פותחו על ידי המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע  
במימון קרן טראמפ  
מסמך זה מיועד לצורכי הוראה בלבד ואין לעשות בו כל שימוש מסחרי או אחר

להגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

## תעודת זהות של המשימה – בניית גשר קשתות

פונקציה ריבועית, תכונות של פונקציה		נושא מתוכנית הלימודים לשילוב המשימה
ט, י		כיתה
45 דקות		זמן נדרש ליישום המשימה
תכונות של גרף הפונקציה הריבועית: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, סימטריה. פונקציה ריבועית בהצגות שונות. התאמה בין גרף לביטוי אלגברי של פונקציה ריבועית. בניית ביטוי אלגברי מנקודות על פרבולה.		ידע ומיומנויות מתמטיים הנדרשים לפתרון המשימה
תכונות של גרף הפונקציה הריבועית: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, סימטריה. פונקציה ריבועית בהצגות שונות. התאמה בין גרף לביטוי אלגברי של פונקציה ריבועית.		
הכנת תחשיב לעלות חומרים לבניית גשר קשתות, וייעול התחשיב באמצעות פונקציה ריבועית ותכונות הפרבולה.		אוריינות קונטקסטואלית
הבנת התרומה של פונקציות וגרפים לפתרון בעיה מתמטית, בניית פונקציות כמודל מתמטי, זיהוי אפשרויות שונות למיקום מערכת צירים והשפעתם על הביטוי האלגברי של פונקציה. קישור בין המודל המתמטי ופתרון הבעיה, טרנספורמציות על פונקציות.		ידע ומיומנויות שהמשימה יכולה לקדם
פירוט בהמשך		הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה



# הצעה לבניית גשר קשתות

## מהלך המשימה

2..... היכרות עם הסיטואציה – בניית גשר קשתות פרבוליות

4..... ייעול תחשיב עלות החומרים לבניית העמודים

5..... חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציה ריבועית

6..... חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציות שונות?

© כל הזכויות שמורות למכון ויצמן למדע – המחלקה להוראת המדעים  
 החומרים פותחו על ידי המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע  
 במימון קרן טראמפ  
 מסמך זה מיועד לצורכי הוראה בלבד ואין לעשות בו כל שימוש מסחרי או אחר

1

להנגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

## היכרות עם הסיטואציה – בניית גשר קשתות פרבוליות

מועצת העמקים פרסמה מכרז לבניית גשר, שימש למעבר של כלי רכב והולכי רגל מעל קניון עמוק שבשטחה. חברת א.א.א. גשרים בע"מ החליטה להגיש הצעה לבניית הגשר, ומינתה לפרויקט צוות מקצועי.



גשר הירקון\*\*



גשר מעל נחל הירקון\*

לאחר בדיקה של תנאי השטח, הציע צוות הפרויקט לבנות גשר קשתות, שבו הכביש עובר מתחת לקו הקשתות. הצוות הסביר שסוג גשר זה מתאים במיוחד למקומות שבהם קשה או בלתי אפשרי, לבנות תמיכה במרכז הגשר, כגון בגשרים מעל נהרות וקניונים עמוקים. למשל: גשר הירקון (בתמונה), גשר הל גייט בארה"ב, גשר נמל סידני באוסטרליה, ועוד.

צורת הקשת שבחר צוות הפרויקט עבור הגשר היתה פרבולה – צורה שנמצאה יעילה לנשיאת עומס ונמצאת בשימוש במבנים שונים בעולם.

בקישור שלפניכם תוכלו להתרשם משימושים של קשת פרבולית במבנים בעולם (מדקה 5.04)

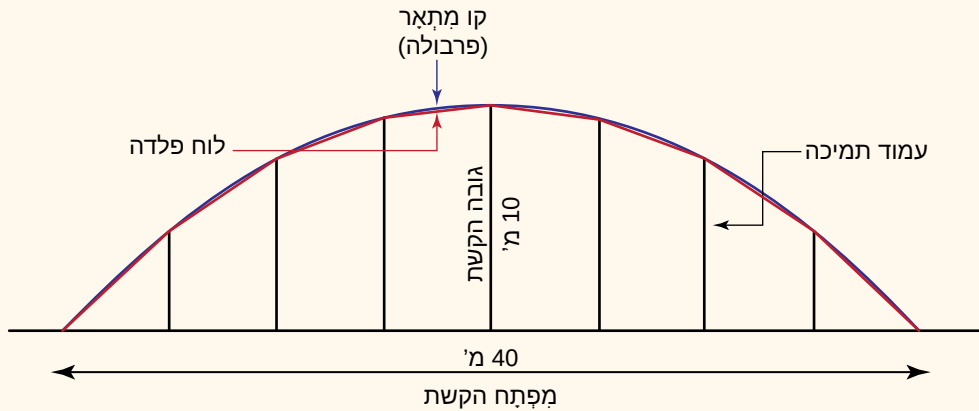
[https://www.youtube.com/watch?v=0HRA\\_y\\_hfUQ](https://www.youtube.com/watch?v=0HRA_y_hfUQ)

\* ילנה שקולניק - Ilana Shkolnik, מתוך אתר פיקיוקי

\*\* מאת Ori, מעלה היצירה, Attribution <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6025250>

לפניכם התכנון הראשוני של הגשר, שהציג צוות הפרויקט למנהלת החברה.

### תכנון ראשוני של גשר מעל הקניון העמוק במועצת העמקים



- גשר קשתות, שבו הכביש עובר מתחת לקו הקשתות.
- שתי קשתות שצורתן זהה.
- כל קשת מורכבת ממספר לוחות פלדה מלבניים ברוחב קבוע, שיוצרים קרוב לקו מתאר של פרבולה.
- המפתח של כל קשת (המרחק מתחילת הקשת ועד סופה) הוא 40 מטר.
- החיבור של הכביש לכל אחת מהקשתות נעשה על-ידי 7 עמודים, שמרחקם זה מזה, ומקצות הקשת, שווה.
- גובה העמוד האמצעי (גובה הקשת) הוא 10 מטרים.

בחרו שני מונחים הקשורים למבנה גשר קשתות, והסבירו אותם.

---



---



---



WEIZMANN  
INSTITUTE  
OF SCIENCE

Department of  
Science Teaching  
המחלקה  
להוראת המדעים



## ייעול תחשיב עלות החומרים לבניית העמודים

התכנון הראשוני של הגשר מצא חן בעיני מנהלת החברה, והיא ביקשה לדעת כמה יעלה לבנות את הגשר. כחלק מתהליך הכשרתן, התבקשו שלוש מתמחות בחברת א.א.א. גשרים בע"מ, לחשב את עלות החומרים שנדרשים לבניית העמודים.

לפניכם קטע משיחה שהמתמחות ניהלו בנושא זה.

**מתמחה 1:** החומרים האלה מתומחרים על פי "מטר אורך" או "מטר רץ". כלומר, המחיר נקבע לפי יחידת אורך של מטר אחד לרוחב קבוע. עלות החומרים לבניית עמודי התמיכה היא 2,000 שקלים למטר אורך (רץ).

**מתמחה 2:** כדי לקבל את העלות הכוללת של החומרים לבניית העמודים, נצטרך לחשב את הגובה של כל עמוד.

**מתמחה 3:** לא צריך לעבוד כל כך קשה. אפשר לייעל את החישוב.

- הציעו דרך לייעול החישוב של עלות החומרים הדרושים לעמודי התמיכה לקשתות.

---

---

---

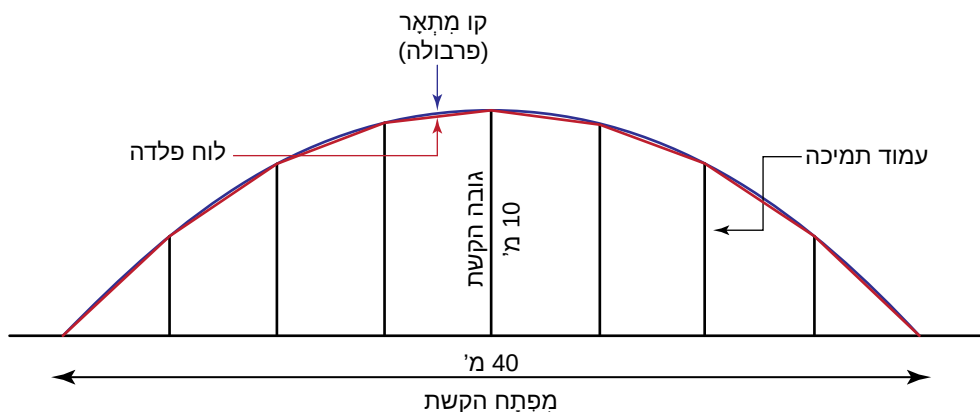
## חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציה ריבועית

המתמחות החליטו לחשב, בשלב הראשון, את עלות החומרים הדרושים לבניית עמודי התמיכה. לפניכם חלק מהדיון שניהלו בנושא זה.

**מתמחה 1:** לפי מה שראינו קודם, אחרי שנחשב את הגבהים של 3 עמודים, נוכל בקלות למצוא את הגבהים של כל 14 העמודים. אבל איך נחשב את הגבהים של 3 העמודים האלה?

**מתמחה 2:** הקשתות הן בצורת פרבולה. אם נוסיף מערכת צירים לשרטוט של הגשר, נוכל לחשב את הגבהים של שלושת העמודים.

1. סמנו בשרטוט שלפניכם 3 עמודים מתאימים להצעה של **מתמחה 1**.



2. היעזרו בהצעה של **מתמחה 2**, הוסיפו מערכת צירים לשרטוט הגשר, וחשבו את העלות הכוללת של החומרים לבניית העמודים. פרטו איך חישבתם

---



---



---

## חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציות שונות?

המתמחות התלהבו מההצעה של **מתמחה 2** להוסיף מערכת צירים לשרטוט של הגשר, אבל לא הצליחו להגיע להסכמה לגבי מיקומה. הן החליטו שכל אחת תמקם את מערכת הצירים בדרך שונה, לפי בחירתה, ותחשב את גובהי העמודים ועלות החומרים הדרושים. לאחר שיסיימו, יפגשו כדי להחליט איזו דרך עדיפה, ואותה יציגו לצוות המקצועי.

לפניכם קטע מהשיחה של המתמחות, לאחר שכל אחת מהן עבדה בנפרד.

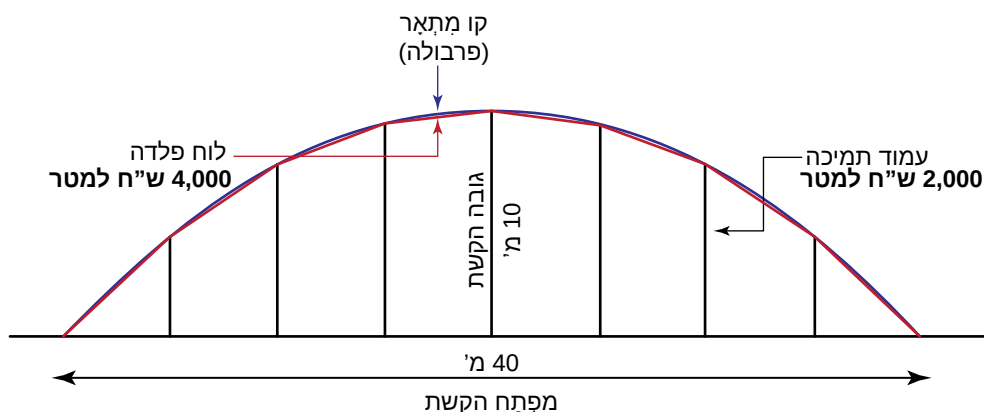
**מתמחה 1:** המיקום שבחרתי למערכת הצירים היה מצוין. מצאתי בקלות את הפונקציה  $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 10$ , ואז חישבתי את האורך הכולל של העמודים. יצא לי 105 מטרים, ועלות החומרים 210,000 שקלים.

**מתמחה 2:** גם המיקום שאני בחרתי היה מצוין, אבל נראה לי שהיתה לך טעות, כי הפונקציה שאני מצאתי היא  $f(x) = -\frac{1}{40}x(x-40)$ , והיא שונה מזאת שאת מצאת. זה מוזר, כי אורכי העמודים והעלות שאני חישבתי הם בדיוק כמו שיצא לך.

**מתמחה 1:** זה באמת מוזר. אני לא חושבת שטעיתי. אולי את טעית.

**מתמחה 3:** נראה לי שאף אחת מכן לא טעתה. גם אני קיבלתי אותם אורכים ואותה עלות, אבל המיקום שבחרתי למערכת הצירים היה פחות מוצלח.

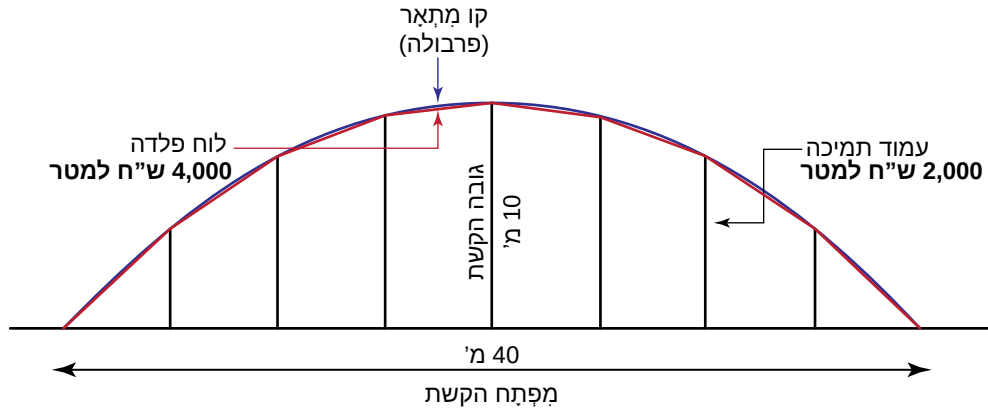
1. הוסיפו לשרטוט מערכת צירים מתאימה לפונקציה שמציעה **מתמחה 1**.



### דרך הפתרון של מתמחה 1



2. הוסיפו לשרטוט מערכת צירים מתאימה לפונקציה שמציעה מתמחה 2.



### דרך הפתרון של מתמחה 2

3. איפה כדאי, לדעתכם, למקם את מערכת הצירים? ואיפה לא כדאי? הסבירו.

---



---

קישור ליחידה [הצעה לבניית גשר קשתות](#) בעברית באתר לחשוב רחוק עם מתמטיקה.  
קישור ליחידה [הצעה לבניית גשר קשתות](#) בערבית באתר לחשוב רחוק עם מתמטיקה.



# הצעה לבניית גשר קשתות

## מהלך המשימה

2..... היכרות עם הסיטואציה – בניית גשר קשתות פרבוליות

4..... ייעול תחשיב עלות החומרים לבניית העמודים

5..... חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציה ריבועית

© כל הזכויות שמורות למכון ויצמן למדע – המחלקה להוראת המדעים  
 החומרים פותחו על ידי המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע  
 במימון קרן טראמפ  
 מסמך זה מיועד לצורכי הוראה בלבד ואין לעשות בו כל שימוש מסחרי או אחר

1

להנגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

## היכרות עם הסיטואציה – בניית גשר קשתות פרבוליות

מועצת העמקים פרסמה מכרז לבניית גשר, שישמש למעבר של כלי רכב והולכי רגל מעל קניון עמוק שבשטחה. חברת א.א.א. גשרים בע"מ החליטה להגיש הצעה לבניית הגשר, ומינתה לפרויקט צוות מקצועי.



גשר הירקון\*\*



גשר מעל נחל הירקון\*

לאחר בדיקה של תנאי השטח, הציע צוות הפרויקט לבנות גשר קשתות, שבו הכביש עובר מתחת לקו הקשתות. הצוות הסביר שסוג גשר זה מתאים במיוחד למקומות שבהם קשה או בלתי אפשרי, לבנות תמיכה במרכז הגשר, כגון בגשרים מעל נהרות וקניונים עמוקים. למשל: גשר הירקון (בתמונה), גשר הל גייט בארה"ב, גשר נמל סידני באוסטרליה, ועוד. צורת הקשת שבחר צוות הפרויקט עבור הגשר היתה פרבולה – צורה שנמצאה יעילה לנשיאת עומס ונמצאת בשימוש במבנים שונים בעולם.

- בקישור שלפניכם תוכלו להתרשם משימושים של קשת פרבולית במבנים בעולם (מדקה 5.04)

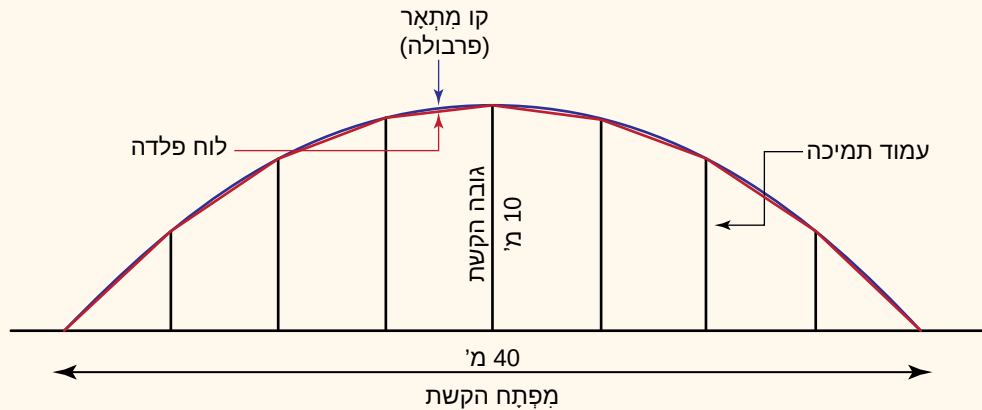
[https://www.youtube.com/watch?v=0HRA\\_y\\_hfUQ](https://www.youtube.com/watch?v=0HRA_y_hfUQ)

\* ילנה שקולניק - Ilana Shkolnik, מתוך אתר פיקיוויקי

\*\* מאת Ori-, מעלה היצירה, Attribution, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6025250>

לפניכם התכנון הראשוני של הגשר, שהציג צוות הפרויקט למנהלת החברה.

### תכנון ראשוני של גשר מעל הקניון העמוק במועצת העמקים



- גשר קשתות, שבו הכביש עובר מתחת לקו הקשתות.
- שתי קשתות שצורתן זהה.
- כל קשת מורכבת ממספר לוחות פלדה מלבניים ברוחב קבוע, שיוצרים קרוב לקו מתאר של פרבולה.
- המפתח של כל קשת (המרחק מתחילת הקשת ועד סופה) הוא 40 מטר.
- החיבור של הכביש לכל אחת מהקשתות נעשה על-ידי 7 עמודים, שמרחקם זה מזה, ומקצות הקשת, שווה.
- גובה העמוד האמצעי (גובה הקשת) הוא 10 מטרים.

בחרו שני מונחים הקשורים למבנה גשר קשתות, והסבירו אותם.

---



---



---

## ייעול תחשיב עלות החומרים לבניית העמודים

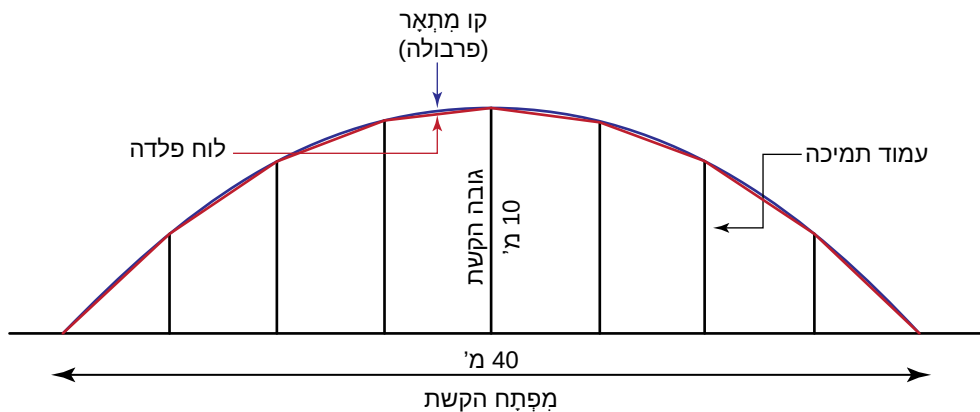
התכנון הראשוני של הגשר מצא חן בעיני מנהלת החברה, והיא ביקשה לדעת כמה יעלה לבנות את הגשר. כחלק מתהליך הכשרתן, התבקשו שלוש מתמחות בחברת א.א.א. גשרים בע"מ, לחשב את עלות החומרים שנדרשים לבניית העמודים.

לפניכם קטע משיחה שהמתמחות ניהלו בנושא זה.

**מתמחה 1:** החומרים האלה מתומחרים על פי "מטר אורך" או "מטר רץ". כלומר, המחיר נקבע לפי יחידת אורך של מטר אחד לרוחב קבוע. עלות החומרים לבניית עמודי התמיכה היא 2,000 שקלים למטר אורך (רץ).

**מתמחה 2:** כדי לקבל את עלות החומרים לבניית כל עמודי התמיכה נצטרך לחשב את הגובה של כל עמוד.

**מתמחה 3:** לא צריך לעבוד כל כך קשה. אפשר לייעל את החישוב.



- הציעו דרך לייעול החישוב של עלות החומרים הדרושים לעמודי התמיכה לקשתות.

---



---



---

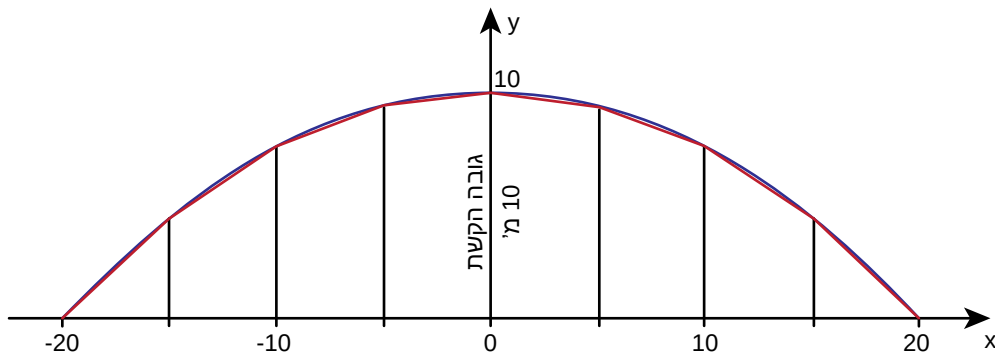


## חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציה ריבועית

המתמחות החליטו לחשב, בשלב הראשון, את עלות החומרים הדרושים לבניית עמודי התמיכה. לפניכם חלק מהדיון שניהלו בנושא זה.

**מתמחה 1:** לפי מה שראינו קודם, אחרי שנחשב את הגבהים של 3 עמודים, נוכל בקלות למצוא את הגבהים של כל 14 העמודים. אבל איך נחשב את הגבהים של 3 העמודים האלה?

**מתמחה 2:** הקשתות הן בצורת פרבולה. הוספתי מערכת צירים לשרטוט הגשר ומצאתי בקלות את הפונקציה  $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 10$ . חישבתי את האורך הכולל של העמודים ובאמצעותו את עלות החומרים הדרושים, ויצא לי 210,000 שקלים.

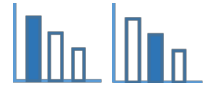


1. סמנו בשרטוט 3 עמודים מתאימים להצעה של **מתמחה 1**.

2. האם לדעתכם **מתמחה 2** חישבה נכון את עלות החומרים? הסבירו.

## הנחיות קצרות לעבודה עם המשימה

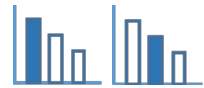
**היכרות עם הסיטואציה – הצעה לבניית גשר קשתות פרבוליות**  
 מציגים את הסיטואציה - הכנת הצעה לבניית גשר קשתות פרבוליות, ומבררים מונחים:



- א. גשר קשתות, שבו הכביש עובר מתחת לקו הקשתות.
  - ב. קשת פרבולית.
- אפשר להיעזר בקישורים שלמטה:

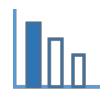
- גשר קשתות בנמל סידיני (מתוך ויקיפדיה)  
[https://he.wikipedia.org/wiki/גשר\\_קשת](https://he.wikipedia.org/wiki/גשר_קשת)
  - איך בנוי גשר קשתות? (אנציקלופדיה אאוריקה)  
<https://eureka.org.il/item/41715/>
- שימושים של קשת פרבולית במבנים שונים בעולם – גשרים (מדקה 5:04)  
[https://www.youtube.com/watch?v=0HRA\\_y\\_hfUQ](https://www.youtube.com/watch?v=0HRA_y_hfUQ)

**ייעול תחשיב עלות החומרים לבניית העמודים**  
 מציגים שיחה בין המתמחות בנוגע לעלות החומרים לבניית הגשר, ומציעים דרכים לייעול תחשיב עלות חומרים לבניית הגשר. למשל: מטעמי סימטריה מספיק לחשב גבהים של 3 עמודים, שנמצאים במחצית של קשת אחת.

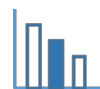


**חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציה ריבועית**  
 א. עובדים על חישוב גובהי העמודים.

- באמצעות בחירת מקום מערכת צירים ומציאת ייצוג אלגברי לפרבולה.



- באמצעות מערכת צירים נתונה וייצוג אלגברי נתון.



ב. מציגים ודנים בפתרונות השונים, למשל:

- אפשרויות שונות לבחירת 3 העמודים שגובהם יחושב.



- אפשרויות שונות למיקום מערכת צירים (למשל: מיקום ציר  $y$  כך שיתלכד עם העמוד האמצעי, מיקום ראשית הצירים בקצה אחד של הקשת) – עוסקים בעניין הזה בהרחבה בפרק הבא ביחידה.
- בגרסה רגילה מציעים לתלמידים רק את ההצעה של מתמחה 1 למיקום מערכת הצירים ומבקשים לחשב את עלות החומרים רק בעזרתה.
- אפשרויות שונות לייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית, בעזרתה אפשר לחשב את גובהי העמודים. למשל: אם בוחרים למקם את מערכת הצירים כך שציר  $y$  יתלכד עם העמוד האמצעי, אפשר לקבל את הייצוגים:



$$f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 10 \quad f(x) = -\frac{1}{40}(x^2 - 400)$$

### חישוב עלות החומרים לבניית העמודים – פונקציות שונות?



- מציגים הצעות שונות למיקום מערכת צירים.
- דנים בפתרונות השונים, למשל:
  - אפשרויות שונות למיקום מערכת צירים (למשל: ציר  $x$  מתלכד עם מישור הכביש וציר  $y$  עם אחד העמודים או עם אחד מקצות הקשת).
  - יתרונות וחסרונות של בחירת מיקום מערכת הצירים בתהליך פתרון הבעיה (למשל: קלות ביצוע, יעילות).
  - השפעת מיקום מערכת הצירים על פתרון הבעיה: הפונקציה הריבועית המתאימה (תלויה במיקום) גובהי העמודים ועלות החומרים (נשאר קבוע).





WEIZMANN  
INSTITUTE  
OF SCIENCE

Department of  
Science Teaching  
המחלקה  
להוראת המדעים

מאור – מתמטיקה אוריינית בחטיבת ביניים



## שאלות לדין

### הכנת מסמך להצגה

מבקשים מהתלמידים להכין הצעה למסמך עלויות שיוגש על ידי המתמחות לצוות המקצועי בחברת א.א.א. גשרים בע"מ. על המסמך לכלול הצגת העלות של החומרים הדרושים לעמודים התומכים, כולל פירוט החישובים שנערכו והצדקת הדרך שבה נעשו.

אם התלמידים למדו טרנספורמציות על פרבולה, אפשר לבקש להוסיף למסמך המלצות לחישוב עתידי יעיל של עלות החומרים הדרושים לעמודים בגשרי קשתות דומים, בעלי מידות אחרות. (לדוגמה, שינוי גובה הקשתות, ללא שינוי המפתח, שקול לכיווץ או מתיחה של פרבולה. במקרה זה, היחס בין האורך הכולל של העמודים ובין הגובה של העמוד המרכזי הוא קבוע – האורך הכולל של העמודים גדול פי 10.5 מגובה העמוד המרכזי).